



TERRIED

**GEOMETRIA FRACTAL
COM APOIO DOS
REGISTROS DE
REPRESENTAÇÃO
SEMIÓTICA E DA
TECNOLOGIA
EDUCACIONAL**

**Mauricio Ramos Lutz
José Carlos Pinto Leivas
[Autores]**



TERRIED

**GEOMETRIA FRACTAL
COM APOIO DOS
REGISTROS DE
REPRESENTAÇÃO
SEMIÓTICA E DA
TECNOLOGIA
EDUCACIONAL**

Mauricio Ramos Lutz
José Carlos Pinto Leivas
[Autores]

1.ª Edição - Copyrights do texto - Autores e Autoras

Direitos de Edição Reservados à Editora Terried

É permitida a reprodução parcial ou total desta obra, desde que citada a fonte.



O conteúdo dos capítulos apresentados nesta obra são de inteira responsabilidade d@s autor@s, não representando necessariamente a opinião da Editora.

Permitimos a reprodução parcial ou total desta obra, considerado que seja citada a fonte e a autoria, além de respeitar a Licença Creative Commons indicada.

Conselho Editorial

Adilson Cristiano Habowski - ***Currículo Lattes***

Anísio Batista Pereira - ***Currículo Lattes***

Adilson Tadeu Basquerote Silva - ***Currículo Lattes***

Alexandre Carvalho de Andrade - ***Currículo Lattes***

Cristiano Cunha Costa - ***Currículo Lattes***

Celso Gabatz - ***Currículo Lattes***

Denise Santos Da Cruz - ***Currículo Lattes***

Emily Verônica Rosa da Silva Feijó - ***Currículo Lattes***

Fernanda Monteiro Barreto Camargo - ***Currículo Lattes***

Fredi dos Santos Bento - ***Currículo Lattes***

Fabiano Custódio de Oliveira - ***Currículo Lattes***

Guilherme Mendes Tomaz dos Santos - ***Currículo Lattes***

Leandro Antônio dos Santos - ***Currículo Lattes***

Lourenço Resende da Costa - ***Currículo Lattes***

Marcos Pereira dos Santos - ***Currículo Lattes***

Dados de Catalogação na Publicação (CIP)

Geometria fractal com apoio dos registros de representação semiótica e da tecnologia educacional [livro eletrônico] Mauricio Ramos Lutz; José Carlos Pinto Leivas. -- 1. ed. -- Alegrete, RS : Editora TerriED, 2023.
PDF.

Ensino

ISBN 978-65-84959-14-9

1. Educação Matemática 2. Matemática
3. Ensino
I. Lutz, Mauricio Ramos. II. Leivas, José Carlos Pinto.

23-142150

CDD-371.904334

Índices para catálogo sistemático:

1. Matemática 371.904334

Aline Grazielle Benitez - Bibliotecária - CRB-1/3129



10.48209/978-65-84959-14-9

Diagramação e Projeto Gráfico: Gabriel Eldereti Machado

Imagem capa: Designed by canva

Revisor Ortográfico: Cristiano Egger Veçossi <cristiano.vecossi@gmail.com>



www.terried.com

contato@terried.com

(55) 99656-1914

APRESENTAÇÃO

O professor deve constantemente reavaliar e refletir sobre o seu fazer pedagógico, de forma que ele possa verificar a importância de metodologias e adequar-se às necessidades e aos perfis de seus alunos. Segundo Lerman (2001, p. 33, tradução nossa), “[...] o professor é o elemento chave na aprendizagem matemática dos alunos”.

Ao estudarmos a História da Matemática, percebemos que muitas ideias e conceitos aconteceram há muitos anos, em geral, no período da antiga Grécia ao século XIX. Já a Geometria Fractal teve sua evolução até chegar à formalização de Benoit B. Mandelbrot há muito pouco tempo, considerando a História da Matemática, ou seja, há menos de 50 anos.

Porém, para atingirmos os estudantes da Educação Básica, devemos apresentar essa Geometria aos nossos alunos de graduação, especialmente. Amparando essa ideia, Nascimento, Silva e Maciel (2012) levantam a questão de obstáculos para a inclusão da Geometria Fractal no Ensino Fundamental e no Médio. Isso ocorre devido aos professores de Matemática sequer terem ouvido falar nessa Geometria em suas graduações. O autor relata que:

[...] é um tema recente para a maioria dos professores de Matemática, pois em muitos cursos de licenciatura em Matemática não constam na grade curricular e nem nos livros didáticos, quando aparecem, são apenas de forma ilustrativa, sem a devida orientação de como desenvolver o trabalho. (NASCIMENTO; SILVA; MACIEL, 2012, p. 114).

O autor apoia o ensino da Geometria Fractal, o qual descreve como um tema que pode ser trabalhado na Educação Básica na forma de incentivo para a aprendizagem de conteúdos matemáticos, tais como “padrões numéricos e geométricos; sequências e séries; progressões geométricas; problemas de contagem; perímetro, figuras planas; volume de sólidos geométricos; logaritmos; introdução ao conceito de limite”. (MOREIRA, 2013, p. 35). Corroborando com essa ideia,

Rabay (2013, p. 101) relata que:

o uso de fractais em sala de aula provoca a quebra de paradigma que a matemática é uma ciência pronta. Como tem aplicações práticas e de fácil compreensão, e reconhecida a semelhança com diversos elementos da própria natureza, mostra que a matemática que é estudada é aplicável. Estimula o uso de computadores, provocando mais fascínio para quem ensina e para quem aprende. Mesmo que abordados em diferentes níveis, o uso da Geometria Fractal provoca nos alunos um olhar diferenciado no mundo que nos rodeia.

Mesmo não estando nos currículos escolares, a Geometria Fractal, uma das geometrias não euclidianas, pode ser explorada em sala de aula aliada ao uso do computador, desenvolvendo uma Geometria mais próxima da rotina dos educandos.

Na atualidade, as transformações sociais requerem mudanças, também nos contextos escolares, porque as informações estão cada vez mais acessíveis aos estudantes, seja por meio do computador, do celular e do *tablet*, dentre outras ferramentas de comunicação. Nesse universo, não há fronteiras nem portas fechadas, tudo acontece na mesma hora, em qualquer lugar. A popularização das Tecnologias Digitais (TD) oferece ao educador a possibilidade de procurar recursos e maneiras diferenciadas de ensinar, que forneçam auxílio em sua prática pedagógica, como a inserção do uso do computador em sala de aula. Segundo Valente (1998, p. 24), “o advento do computador na educação provocou o questionamento dos métodos e da prática educacional”.

Nesse contexto, um dos desafios para os docentes é tornar as aulas de Matemática mais dinâmicas, participativas e instigadoras. Para que isso ocorra, podemos utilizar outras ferramentas como os *softwares* educacionais, exemplo é o *GeoGebra*¹. Uma das vantagens é o fato de ele ser gratuito e funcionar com o sistema operacional *Linux*², presente na maioria dos laboratórios das escolas pú-

1 Para mais informações: <<https://www.geogebra.org/>>.

2 *Linux* é um Sistema Operacional que possibilita a execução de programas em um computador e outros dispositivos.

blicas. Também é compatível com o *Windows*³ e possui versão em português, o que é um facilitador para os estudantes que não possuem domínio de outra língua. Entretanto, observamos que, com ele, ainda vem sendo priorizado o ensino da Geometria Euclidiana. Desse modo, a utilização dessa ferramenta é limitada para o ensino de geometrias não euclidianas.

Além da pesquisa teórica sobre a temática, também realizamos aplicação de atividades, previamente planejadas, com os alunos do curso de licenciatura em Matemática do Instituto Federal Farroupilha (IFFar) – Campus Alegrete, em cujo currículo não consta o tema Geometria Fractal. Como os alunos já estão familiarizados com o uso da informática na sala de aula, isso facilitou a pesquisa.

A aplicação das atividades, envolvendo a Geometria Fractal, tem aporte teórico nos Registros de Representação Semiótica (RRS), de Duval (1995; 2009; 2010). Os estudos foram guiados por meio de uma sequência de atividades, em que se coloca o aluno como sujeito ativo do seu processo de aprendizagem, ou seja, ele irá construir seu conhecimento a partir do contato entre vários elementos que podem compô-la. Para Henriques e Almouloud (2016, p. 467),

o professor que pretende fazer com que os seus alunos aprendam Matemática, sob diferentes pontos de vista, não deve, simplesmente, tratá-la sem evocar o importante papel exercido pelos diferentes registros que ele mobiliza em função dos objetos matemáticos a representar/ensinar.

Para Duval (2010), representar, tratar e converter RRS são elementos principais de sua teoria. O teórico considera ser fundamental mobilizar sistemas cognitivos específicos para cada atividade matemática, basicamente ligada às operações semióticas. Ou seja, para o autor, só é possível conhecer, compreender e aprender conceitos matemáticos pela utilização das representações semióticas do objeto matemático. A compreensão que se deve fazer em relação aos RRS é de que, quando se visualiza um objeto matemático sob diferentes formas de registros, ele fica fortalecido na memória.

³ *Windows* é um sistema operacional de multitarefas para computadores e dispositivos móveis, desenvolvido pela *Microsoft*.

Diante do que foi exposto, elaboramos o problema, o objetivo geral, bem como os específicos da pesquisa, os quais passamos a tratar.

Em função do tema, Geometria Fractal, os processos de ensino com enfoque no uso das TD e o de aprendizagem por meio dos RRS, elaboramos o problema: investigar possibilidades de inserção de noções de Geometria Fractal nos cursos de licenciatura em Matemática do IFFar com a utilização das TD.

A fim de responder a esse problema, delineamos o objetivo geral que foi o de investigar possibilidades de inserção de noções de Geometria Fractal nos cursos de licenciatura em Matemática do IFFar com o uso das TD.

Para podermos atender o objetivo geral elencamos os seguintes objetivos específicos:

- Explorar o ensino e a aprendizagem da Geometria Fractal, por meio de TD e dos RRS;

- Planejar uma sequência de atividades com base em conhecimentos algébricos e geométricos (a partir da Geometria Fractal) que incluam o uso das TD;

- Executar e analisar a sequência de atividades com um grupo de alunos do curso de licenciatura em Matemática do IFFar – Campus Alegrete.

Este e-book originou-se a partir da pesquisa de doutorado de Maurício Ramos Lutz, orientada por José Carlos Pinto Leivas e realizada no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Matemática da Universidade Franciscana (UFN) – Santa Maria/RS⁴.

Agradecemos a todos os envolvidos que disponibilizaram seus esforços e seu conhecimento para auxiliar no desenvolvimento deste trabalho.

⁴ Para acessar a tese na íntegra acesse o link abaixo e pesquise pelo nome do autor ou pelo título “Possibilidade de inserção da Geometria Fractal na licenciatura em Matemática do IFFar”. <<http://www.tede.ufn.edu.br:8080/handle/UFN-BDTD/903>>

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1

GEOMETRIA FRACTAL.....	11
1.1 TIPOS DE FRACTAIS.....	16
1.2 FRACTAIS CLÁSSICOS E SEUS PRECURSORES	18
1.2.1 Fractal de Dürer.....	18
1.2.2 Conjunto de Cantor ou Poeira de Cantor.....	20
1.2.3 Curva de Peano.....	21
1.2.4 Curva de Hilbert.....	22
1.2.5 Curva de Koch.....	24
1.2.6 Fractais de Sierpinsky.....	25
1.2.7 Esponja de Menger.....	27
1.2.8 Conjunto de Fatou e Julia.....	28
1.2.9 Conjunto de Mandelbrot.....	29
1.3 DIMENSÃO FRACTAL OU DIMENSÃO HAUSDORFF- BESICOVITCH.....	30

CAPÍTULO 2

OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA.....	38
---	-----------

CAPÍTULO 3

AS TECNOLOGIAS DIGITAIS NO ENSINO DE MATEMÁTICA.....	51
---	-----------

CAPÍTULO 4

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA.....	58
4.1 A NATUREZA DA PESQUISA.....	59
4.2 O CONTEXTO DA PESQUISA E OS INVESTIGADOS.....	62
4.3 ATIVIDADES PROPOSTAS E INSTRUMENTOS PARA COLETA DE INFORMAÇÕES.....	62
4.4 PROCEDIMENTOS DE ANÁLISE.....	68

CAPÍTULO 5

CONHECIMENTOS PRODUZIDOS: INTERLOCUÇÃO DO REFERENCIAL TEÓRICO COM OS DADOS EMPÍRICOS.....	70
5.1 PRÉ-TESTE: VERIFICANDO OS CONHECIMENTOS PRÉVIOS.....	72
5.2 OFICINA 1: FRACTAL HEXAGONAL DE DÜRER.....	75
5.3 OFICINA 2: DIMENSÃO FRACTAL	94
5.4 OFICINA 3: CURVA DE PEANO	107
5.5 OFICINA 4: TETRAEDRO DE SIERPINSKY.....	118
5.6 PÓS-TESTE: VERIFICANDO A APRENDIZAGEM	139

CAPÍTULO 6

CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	145
REFERÊNCIAS.....	150
SOBRE OS AUTORES.....	160

CAPÍTULO 1

GEOMETRIA FRACTAL

Neste capítulo, estruturamos os aspectos referentes à revisão de literatura que fundamentou nossa pesquisa, nesse caso, a Geometria Fractal. No decorrer dele, apresentamos a origem histórica, juntamente com os fractais clássicos e seus precursores e, para finalizar, a dimensão fractal.

A Geometria pode se relacionar diretamente com o cotidiano do sujeito. É um dos ramos dos estudos matemáticos que instiga a interpretação e o entendimento, possibilitando, tanto a quem ensina, quanto a quem aprende, ver com outros olhos o mundo que os rodeia. Essa área trata das formas, do espaço, das grandezas e das medidas, tudo que é ligado às nossas rotinas e muito mais.

Durante inúmeros séculos, empregamos conceitos relacionados à Geometria Euclidiana para representar objetos matemáticos e modelar elementos da natureza. Essa Geometria, muitas vezes, reproduz de forma satisfatória os objetos criados pelo homem, entretanto, há casos em que não temos uma boa representação ou essa é muito complexa. A partir dessa inquietação e da não representação de vários objetos da natureza pela Geometria Euclidiana, foi desenvolvida a Geometria Fractal pelo matemático Benoit B. Mandelbrot.

Segundo Alves (2007) e Mandelbrot (1977), o estudo dos fractais atualmente tem inúmeras aplicações em diversas áreas. Por exemplo, na área das tecnologias, um misturador de fluidos otimiza o consumo de energia; na agricultura, em movimentos dos rios e análise de solos; na medicina, em um estudo da fisiologia animal, analisa-se as ramificações pulmonares, veias e artérias. Também, aplica-se ao diagnóstico precoce, pela análise de imagens, do Mal de Alzheimer e do câncer, por meio de modelagem. Fazendo uso na Biologia, podemos encontrar inúmeras estruturas fractais em plantas e micro-organismos; na computação gráfica, são utilizadas pelo cinema quando necessitam criar um cenário com rios, montanhas e plantas, pois um fractal fornece uma boa aproximação de suas representações.

A Geometria Fractal, uma das não euclidianas, é uma opção para tais aplicações, pois ela nos possibilita ir além das dimensões inteiras, próprias dos ob-

jetos da Geometria Euclidiana. Ela permite-nos ir além dos estudos de quadrados, retângulos, círculos e outras formas geométricas, dificilmente encontradas na natureza, a saber, em vegetais, rochas e rios, que não apresentam, em geral, a dimensão inteira.

Segundo Goldenberg (1991, p. 50, tradução nossa), a Geometria Fractal,

[...] tem sido reconhecida como uma ferramenta de modelagem altamente valorizada, aplicável em grande variedade de ciências.

[...] Essas grandes aplicações em ciências atestam a importância da Geometria Fractal como uma ferramenta para além do domínio da matemática acadêmica e sua posição potencialmente crucial no currículo como uma organização e forma unificadora para ciência e matemática.

Considerando a História da Matemática, a Geometria Fractal é um estudo recente, desenvolvido pelo matemático Benoit B. Mandelbrot, nos meados da década de cinquenta, com a publicação do livro “Os objetos fractais: forma, acaso e dimensão”, em 1975. Segundo Janos (2008, p. 17), a Geometria Fractal “é uma linguagem matemática que descreve, analisa e modela as formas encontradas na natureza”.

É preciso esclarecermos que não estamos dizendo não ser importante desenvolvermos os conceitos da Geometria Euclidiana na Educação Básica e Superior. Ao contrário, afirmamos que é um estudo essencial para o desenvolvimento do pensamento geométrico e matemático, porém existem outras possibilidades de descrever objetos naturais que podemos explorar em sala de aula.

Mas afinal, qual é a definição de fractal? Segundo Mandelbrot (1989, p. 15, tradução nossa), um de seus precursores, “Um fractal é, por definição, um conjunto para o qual a dimensão Hausdorff-Besicovith excede estritamente a dimensão topológica”. Percebemos que o autor necessitou do conceito de dimensão para poder definir fractal, o que, inicialmente, recebeu críticas e revisões. Outros estudiosos vêm reformulando essa definição, como, por exemplo, Feder (1988, p. 11, tradução nossa): “Um fractal é uma forma cujas partes se assemelham ao seu

todo sob alguns aspectos”. Também Falconer (2003, p. xx–xxi, tradução nossa) propõe entendimento do fractal por caracterizações:

- (i) F tem uma estrutura pequena, isto é, detalhes sobre escalas arbitrariamente pequenas.
- (ii) F é muito irregular para ser descrito em linguagem geométrica tradicional, ambos local e globalmente.
- (iii) Muitas vezes, F tem alguma forma de autossimilaridade, talvez aproximada ou estatística.
- (iv) Geralmente, a “dimensão fractal” de F (definida de alguma forma) é maior do que a sua dimensão topológica.
- (v) Na maioria dos casos de interesse, F é definido de uma maneira muito simples, talvez recursivamente.

Ainda, procurando formalizar uma definição, Stewart (1996, p. 12) relata que “os fractais são formas geométricas que repetem sua estrutura em escalas cada vez menores”. Gouvea e Murari (2004, p. 5) consideram os fractais:

[...] como formas que se caracterizam por repetir um determinado padrão (autossimilaridade). Em consequência da autossimilaridade, quando vistas através de uma lente de aumento, as diferentes partes de um Fractal se mostram similares à forma como um todo.

Percebemos que a primeira definição de Mandelbrot é mais abrangente e utiliza conceitos matemáticos mais avançados. Já as outras, aparentemente, são mais objetivas e compreensivas aos objetivos desta pesquisa. Ainda assim, precisamos esclarecer alguns conceitos envolvidos nessa definição.

Segundo Leivas (2007), a autossimilaridade pode ser definida como a semelhança que uma parte tem com o todo, ou seja, é uma característica primordial de uma estrutura fractal, segundo a qual cada nova imagem obtida conserva as mesmas propriedades ou características da imagem original. Ainda, pelo autor, um processo é denominado recursivo ou iterativo, se, ao final de seu processo de criação, quando replicado novamente, é gerada uma estrutura similar.

Portanto, a autossimilaridade é o resultado da aplicação, várias vezes, de uma mesma lei de formação. Entretanto, vale ressaltar que essa mesma característica é chamada por Nunes (2006, p. 29) de autossimilaridade: “Uma figura é

autossemelhante se apresenta sempre o mesmo aspecto visual a qualquer escala que seja ampliada ou reduzida, ou seja, se parte de uma figura se assemelha à figura vista como um todo”. O autor considera dois tipos de autossemelhança, a exata e a aproximada ou estatística.

Dizemos que a autossemelhança é exata, quando as figuras são provenientes de processos matemáticos nos quais o conjunto total é o resultado de várias reproduções perfeitas geradas por processos iterativos. Já a autossemelhança aproximada ou estatística está presente em formas da natureza, em que as partes, independentemente de apresentarem a mesma estrutura, não são reproduções exatas entre si e com o todo. Como exemplo, temos a couve-flor e a folha de uma samambaia (Figura 1).

Figura 1 – Exemplo de autossemelhança aproximada em fractais



Fonte: Serra *et al.* (2005, p. 15).

Entretanto, como visto, existe mais de uma definição para fractais, o que não impossibilita entendermos seu conceito singular e transmiti-lo de forma simples e objetiva. Segundo Mandelbrot (1989, p. 13-14, tradução nossa),

será necessário definir uma figura fractal de modo rigoroso, para em seguida dizer que um objeto real é fractal por se assemelhar à figura geométrica que constitui o modelo? Considerando que um tal formalismo seria prematuro, adaptei um método muito diferente: um método baseado numa caracterização aberta e intuitiva, onde os avanços se efetuam por retoques sucessivos.

Por esse viés, Barbosa (2005) reforça a ideia de Mandelbrot para o uso dos fractais, sem se apegar ao formalismo conceitual. Leva essa discussão para o campo educacional: “essa dificuldade não deve ser obstáculo na Educação, a qual pode simplesmente convir com uma conceituação simples e de fácil entendimento. Bastará considerarmos a autossimilaridade”. (p. 19).

Para a nossa pesquisa, optamos por utilizar a definição de Barbosa (2005), a qual considera fractais como entes que constituem uma imagem de si próprios em cada uma de suas partes, sendo essas semelhantes e definindo assim a propriedade de autossimilaridade.

1.1 TIPOS DE FRACTAIS

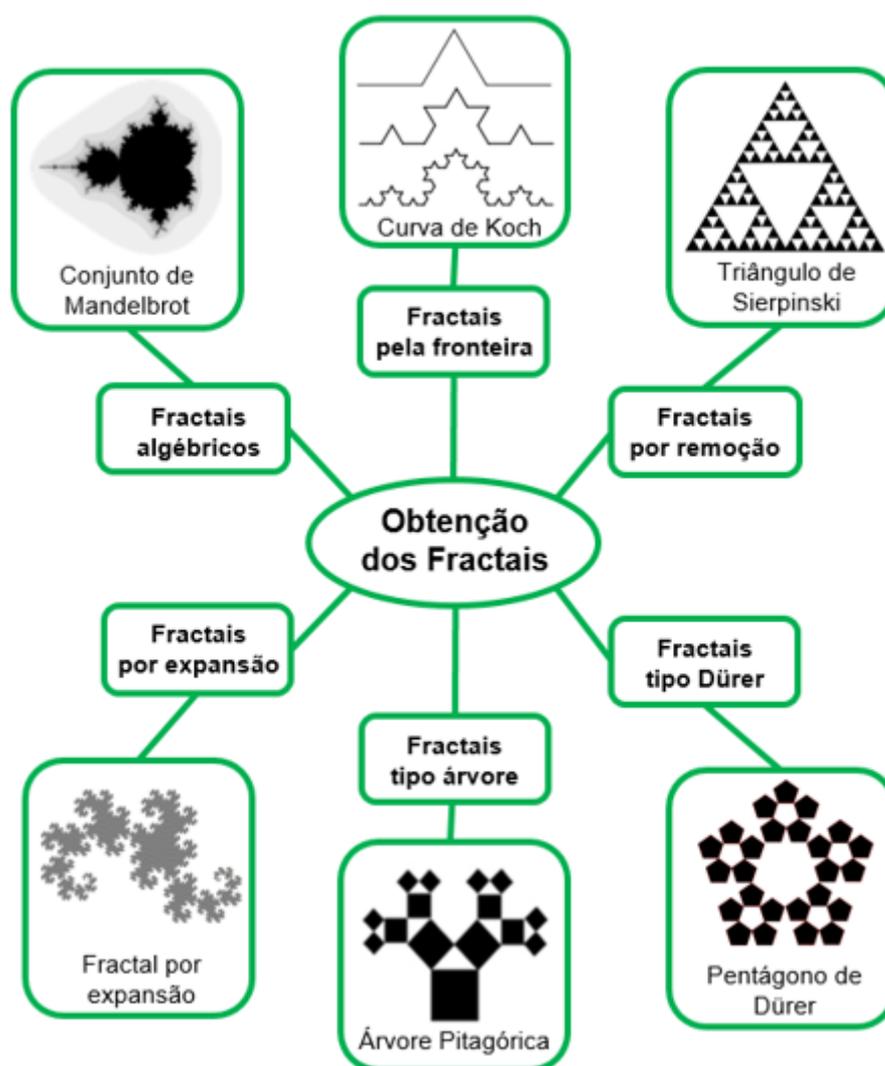
Podemos obter um fractal por mais de uma forma. No livro “Descobrimo a Geometria Fractal para a sala de aula”, Barbosa (2005) classifica suas formas de obtenção em quatro tipos: fractais pela fronteira, por remoção, tipo Dürer e tipo árvore. Suas construções ocorrem por meio de processos recursivos, isto é, sempre é utilizado um procedimento de criação infinito que, nesse caso, é um processo geométrico.

O procedimento para a construção dos fractais pela fronteira é realizado a partir de uma geração recursiva sobre a linha poligonal da figura geométrica geradora do fractal. Para a geração de um fractal por remoção, a forma que se dá à criação desses fractais é a partir da remoção de regiões internas semelhantes à figura inicial – figura geométrica geradora do fractal. Para os fractais tipo Dürer, seu processo de obtenção baseia-se em fazer as iterações de um mesmo polígono regular, criando um novo polígono interno a eles a partir de seus vértices, em um processo recursivo. Já para os fractais tipo árvore, a maneira para sua criação é gerar imagens semelhantes às de uma árvore.

Além dessas quatro categorias apresentadas por Barbosa (2005), podem ser acrescentadas mais duas, segundo Gouvea (2005), quais sejam, os fractais por expansão e os fractais algébricos.

Os fractais por expansão são obtidos expandindo polígonos para a região exterior da imagem inicial, o que se diferencia das categorias anteriores, pois a imagem geométrica geradora do fractal é constituída por mais de uma imagem geométrica. Já os algébricos são aqueles gerados por equações matemáticas não-lineares, e não por imagens geométricas regulares, com um grau de complexidade superior aos citados anteriormente. A Figura 2 apresenta um resumo dos tipos de obtenção dos fractais com suas respectivas imagens.

Figura 2 – Resumos dos tipos de obtenção dos fractais

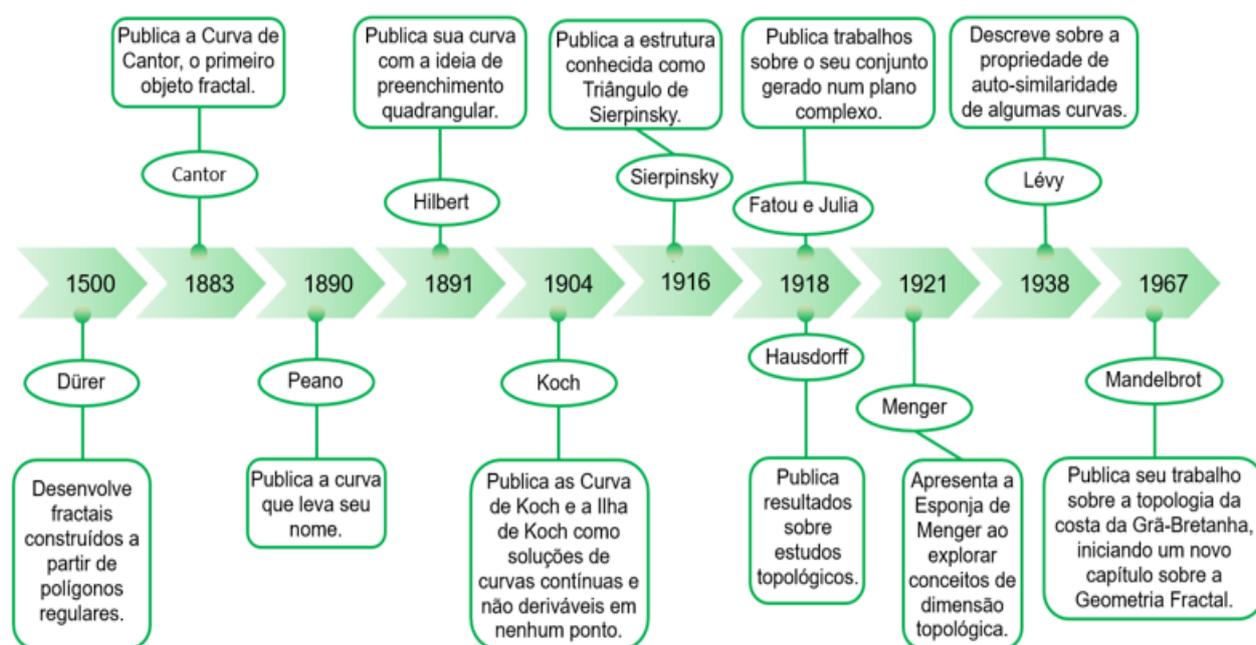


Fonte: elaborado pelos autores.

1.2 FRACTAIS CLÁSSICOS E SEUS PRECURSORES

Apesar de o termo Geometria Fractal ter sido criado por Mandelbrot na década de 70, século XX, diversos estudos antecederam essa época e vários objetos matemáticos, atualmente, são considerados fractais. Para um melhor entendimento, traçamos uma breve linha cronológica, Figura 3, com base nos trabalhos de Rabay (2013) e Neto (2015), relatando autoria e obra de acordo com o respectivo ano de publicação.

Figura 3 – Linha cronológica da Geometria Fractal



Fonte: elaborado pelos autores.

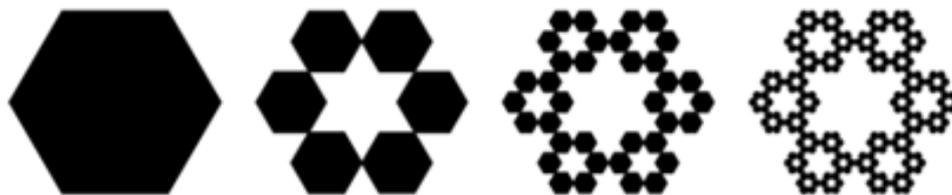
Veremos, a seguir, os aspectos estruturais de alguns objetos fractais pioneiros, que foram desenvolvidos no decorrer da história, os quais constituem o início da Geometria Fractal, e seus precursores.

1.2.1 Fractal de Dürer

O alemão Albrecht Dürer (1471–1528) foi pintor, ilustrador, matemático e teórico de arte, sendo o autor dos fractais que levam seu nome (Figura 4). Tam-

bém é atribuída a Dürer a autoria da construção do desenho do pentágono regular utilizando apenas régua e compasso. (OLIVEIRA, 2016).

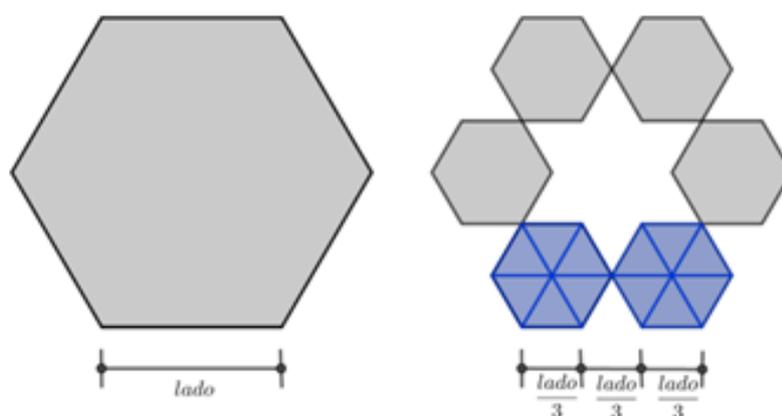
Figura 4 – Fractal hexagonal de Dürer



Fonte: construção dos autores no *GeoGebra*.

Para construirmos o fractal do tipo Dürer, seguimos as orientações de Barbosa (2005) e Rabay (2013). Primeiramente, escolhemos um polígono regular, nesse caso, um hexágono regular. O segundo passo é construir internamente, em cada vértice do hexágono inicial, um novo hexágono com lado de tamanho igual a um terço do tamanho do lado inicial, pois o triângulo formado pelo lado do hexágono inicial e dos hexágonos gerados é equilátero, conforme apresentado na Figura 5.

Figura 5 – Detalhe do fractal hexagonal de Dürer



Fonte: construção dos autores no *GeoGebra*.

Os novos polígonos gerados são semelhantes e devem estar igualmente espaçados. Para mais iterações, é só repetir o segundo passo. Podemos observar que, para n iterações, teremos 6^n hexágonos regulares.

1.2.2 Conjunto de Cantor ou Poeira de Cantor

O matemático russo Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845–1918) é conhecido por ter contribuído imensamente para a teoria dos conjuntos e utilizar, de forma pioneira, o símbolo \mathbb{R} para designar o conjunto dos números reais. (OLIVEIRA, 2016).

Segundo Janos (2008), em 1883, Cantor publicou um trabalho no qual é construído um conjunto atualmente denominado de Conjunto de Cantor ou Poeira de Cantor. Formado por uma quantidade infinita de segmentos de dimensões muito pequenas (tanto mais próximas de zero, quanto mais segmentos forem tomados), o Conjunto de Cantor é constituído por partes autossemelhantes (Figura 6), possuindo cardinalidade igual à dos números complexos ou dos números reais, ou seja, é não-enumerável.

Figura 6 – Conjunto de Cantor ou Poeira de Cantor



Fonte: construção dos autores no *GeoGebra*.

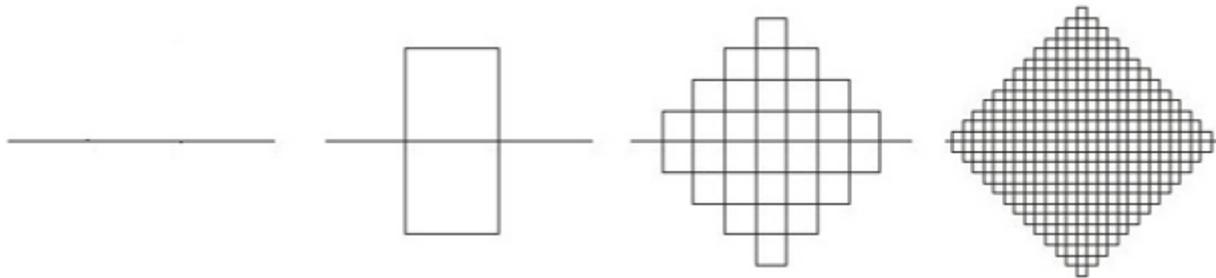
Montenegro (1991), Barbosa (2005) e Janos (2008) apresentam a regra para a construção do Conjunto de Cantor. Ele é um subconjunto infinito de pontos do intervalo $[0, 1]$. Para o construirmos, consideramos o intervalo fechado $[0, 1]$, representado na reta; e o dividimos em 3 partes congruentes, retirando a parte central (ou terço médio). Dessa maneira, ficamos com 2 intervalos fechados disjuntos, de comprimento igual a $1/3$ do comprimento inicial. Repetindo esse processo aos intervalos formados, obtemos 2^2 intervalos fechados de comprimento $1/9$ ou $\frac{1}{3^2}$. Para a próxima iteração, obtemos 2^3 intervalos fechados de comprimento

$1/27$ ou $\frac{1}{3^3}$. Replicando esse processo n vezes, teremos 2^n intervalos fechados de comprimento $\frac{1}{3^n}$ cada. Segundo Paixão (2014), como o valor de n aumenta para cada iteração, infinitamente, o comprimento de cada segmento tende a zero. Na construção numérica, isso significa que o intervalo tende a um ponto, de onde surge a denominação, “Poeira de Cantor”.

1.2.3 Curva de Peano

O matemático italiano Giuseppe Peano (1858–1932) publicou, em 1890, um estudo aprofundado das noções de continuidade e dimensão, no qual desenvolveu a curva que leva seu nome, em que prometia cobrir totalmente uma superfície plana quadrangular (BARBOSA, 2005). Para melhor exemplificação, vejamos a Figura 7.

Figura 7 – Curva de Peano



Fonte: construção dos autores no *GeoGebra*.

Para a confecção da Curva de Peano, empregamos o processo iterativo. Para tanto, utilizamos a construção conforme Coelho (2015) e Iwai (2015) a apresentam em seus trabalhos. Para iniciá-la, tomemos um segmento de reta de comprimento unitário. Dividimo-lo em três partes congruentes. No segmento central, desenhemos um retângulo, que é dividido pelo segmento inicial em dois quadrados congruentes. Ao final dessa primeira iteração, obtemos 9 segmentos de comprimento $1/3$ cada. Para a segunda iteração, repetimos os passos anterior-

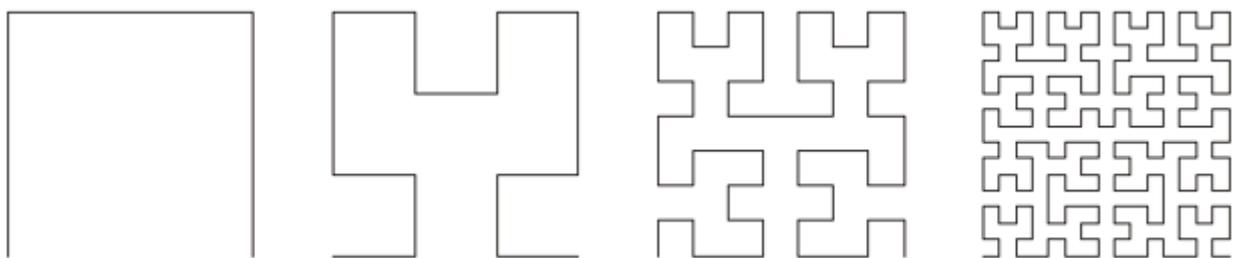
res. Assim, obteremos 81 segmentos de comprimento $1/81$ do inicial. Continuando esse processo de iteração n vezes, teremos 9^n segmentos de comprimento $\frac{1}{3^n}$.

1.2.4 Curva de Hilbert

David Hilbert (1862–1943) foi um matemático alemão cuja maior contribuição à Matemática, segundo Barbosa (2005), foi a organização da Geometria Euclidiana na forma axiomática.

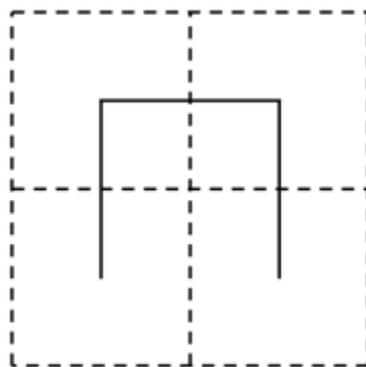
A Curva de Hilbert, descoberta em 1891 (Figura 8), percorre todos os pontos de um quadrado, logo, ela pertence a uma família das curvas de Peano. Entretanto, essa curva possui pequenas diferenças, comparada à de Peano. A primeira é que, a cada iteração no seu processo recursivo, a curva preenche quadrados menores, mas ela nunca se intercepta. Outra característica dessa curva é que ela passa por todos os pontos da superfície e, por meio do seu processo de recursividade, o seu comprimento é infinito. (PAIXÃO, 2014).

Figura 8 – Curva de Hilbert



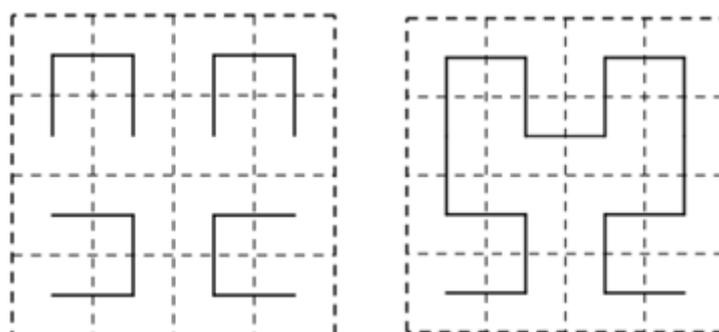
Fonte: construção dos autores no *GeoGebra*.

Para realizar a construção, seguimos o relatado por Negri (2014). Primeiramente (Etapa 1), tomemos um quadrado de lado l ; formamos quatro quadrados ligando os pontos médios de seus lados opostos. Após unir os pontos centrais desses quadrados, forma-se a curva com três segmentos consecutivos, como apresentada na Figura 9.

Figura 9 – Etapa 1 da construção Curva de Hilbert

Fonte: construção dos autores no *GeoGebra*.

Na segunda parte da construção (Etapa 2), representada na Figura 10, percebemos cada um dos quatro quadrados pequenos sendo substituído por outros quatro quadrados. Logo após, são ligados os pontos centrais dos 16 novos quadrados, como foi feito na etapa anterior.

Figura 10 – Etapa 2 da construção Curva de Hilbert

Fonte: construção dos autores no *GeoGebra*.

Veja que rotações convenientes são realizadas de forma que todos os pontos centrais ficam interligados sem que exista intersecção da curva. Esse processo é repetido indefinidamente, de forma que a origem da curva sempre ocupe o canto inferior esquerdo e sua extremidade fique no canto inferior direito, como pode ser visto na Figura 10. Segundo Mendonça (2014), se continuarmos esse processo de iteração n vezes, teremos 4^n quadrados e o comprimento da curva será dado por $(4^n - 1) \left(\frac{1}{2^n}\right)$.

1.2.5 Curva de Koch

O matemático sueco Niels Fabian Helge von Koch (1870–1924) é reconhecido por ter descrito um dos primeiros fractais de curva, em 1904, a Curva de Koch, a qual, mais tarde, originou a Ilha de Koch ou Floco de Neve de Koch, sendo que ambas as construções são feitas pelo mesmo processo.

Segundo Spinadel, Perera e Perera (1993), a Curva de Koch (Figura 11) foi considerada uma curva “patológica”, pois ela é exemplo de curva contínua que não tem tangente em nenhum dos seus pontos, além de ter a propriedade de que, dados dois pontos quaisquer sobre a curva, o comprimento do arco entre os dois é infinito.

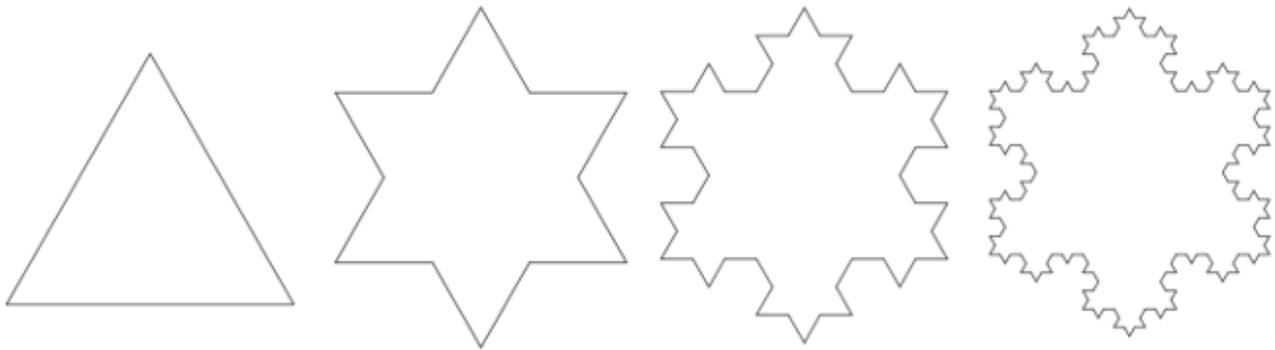
Figura 11 – Curva de Koch



Fonte: construção dos autores no *GeoGebra*.

Segundo Barbosa (2005) e Iwai (2015), podemos construir a Curva de Koch a partir de um segmento de reta, dividindo-o em três partes congruentes, em que a parte central será a base para a construção de um triângulo equilátero, sendo suprimida após a construção do triângulo. Assim, ficarão quatro segmentos de reta com tamanho de $1/3$ do segmento original. Aplicando, novamente, esse processo de construção, obtemos 16 segmentos com tamanho de $1/9$ do segmento original. Repetindo n vezes, teremos 4^n segmentos de reta de comprimento $\frac{1}{3^n}$ do segmento original.

Janos (2008) ressalta que uma versão da Curva de Koch é a Ilha de Koch ou Floco de Neve (Figura 12), cuja construção se diferencia apenas no primeiro passo, pois em vez de começarmos com um segmento de reta, iniciamos com um triângulo equilátero e construímos, sobre cada um de seus lados, a Curva de Koch.

Figura 12 – Ilha de Koch ou Floco de Neve

Fonte: construção dos autores no *GeoGebra*.

1.2.6 Fractais de Sierpinsky

Barbosa (2005) relata que o Triângulo e o Tapete de Sierpinsky, apresentados em 1916, são obras do matemático polonês Waclaw Sierpinsky (1882–1969). Iwai (2015) destaca as contribuições excepcionais de Sierpinsky para a teoria dos conjuntos (pesquisa sobre o axioma da escolha e da hipótese do contínuo), teoria dos números, teoria de funções e topologia.

Para construir o Triângulo de Sierpinsky, Janos (2008) inicia o processo com um triângulo equilátero. Inicialmente, encontramos o ponto médio de cada lado. Posteriormente, unimos esses pontos por três segmentos de reta, formando quatro triângulos menores e congruentes, sendo que o triângulo central deve ser retirado, sobrando três triângulos para aplicarmos novamente o procedimento. A cada nova iteração, a quantidade de triângulos congruentes fica multiplicada por três e a medida do lado fica igual à metade da medida do lado do triângulo anterior (Figura 13). Repetindo esse processo n vezes, formaremos 3^n triângulos congruentes com lados de comprimento $\frac{1}{2^n}$ da medida do lado do triângulo inicial.

Figura 13 – Triângulo de Sierpinsky

Fonte: construção dos autores no *GeoGebra*.

Para a construção do Tapete de Sierpinsky (Figura 14), utilizamos a mesma técnica de construção do Triângulo de Sierpinsky, porém, a figura geométrica inicial utilizada agora é um quadrado.

Figura 14 – Tapete de Sierpinsky

Fonte: construção dos autores no *GeoGebra*.

Barbosa (2005) parte de um quadrado, dividindo-o em nove pequenos quadrados congruentes e eliminando o central. Após essa etapa, aplica esse mesmo procedimento em cada um dos oito quadrados restantes e, assim, sucessivamente e iterativamente. A cada nova iteração, a quantidade de quadrados fica multiplicada por oito e a medida do lado é igual a $\frac{1}{3}$ da medida do lado do quadrado anterior. Repetindo esse processo n vezes, teremos formado 8^n quadrados de $\frac{1}{3^n}$ da medida da aresta do quadrado inicial.

Outro fractal que leva o nome de Sierpinsky é o Tetraedro de Sierpinsky (Figura 15), sendo esse uma generalização tridimensional do Triângulo de Sierpinsky.

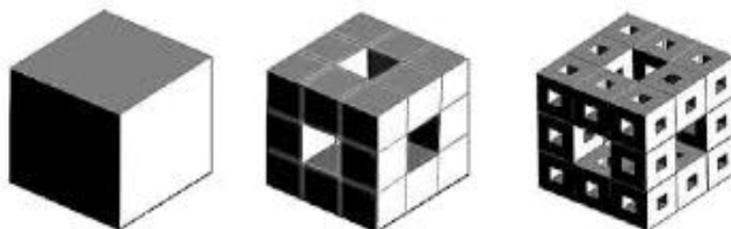
Figura 15 – Tetraedro de Sierpinsky

Fonte: adaptado de Neto (2015, p. 48).

Iwai (2015) apresenta a construção do Tetraedro de Sierpinsky, iniciando o processo com um tetraedro. Primeiramente, localiza o ponto médio de cada aresta e une esses pontos médios por 12 segmentos de reta, formando seis tetraedros menores e congruentes. Retira os dois tetraedros centrais (que formam um octaedro). Disso, resultam quatro tetraedros para novamente aplicar o mesmo processo. A cada nova iteração, a quantidade de tetraedros fica multiplicada por quatro e a medida da aresta é a metade da medida da aresta do tetraedro anterior. Portanto, se repetirmos n vezes o processo, terão se formado 4^n tetraedros com arestas medindo $\frac{1}{2^n}$ da aresta do tetraedro inicial.

1.2.7 Esponja de Menger

Segundo Negri (2014), a Esponja de Menger (Figura 16) foi criada pelo matemático austríaco Karl Menger (1902–1985) em 1921. Ela é uma generalização tridimensional do Tapete de Sierpinsky, tendo sua construção baseada na mesma forma, porém o processo iterativo é feito a partir de um cubo.

Figura 16 – Esponja de Menger

Fonte: adaptado de Negri (2014, p. 42).

Montenegro (1991) apresenta o processo de construção da Esponja de Menger em duas etapas, considerando um cubo de aresta l . Na primeira etapa, divide o cubo em 27 cubos menores e congruentes, cada um com uma aresta igual $1/3$ da aresta inicial (processo similar ao do Tapete de Sierpinsky) em cada face do cubo. Então, remove o cubo central e os seis cubos que têm uma face localizada no meio de cada face do maior. A segunda etapa consiste em repetir o processo da etapa 1 nos 20 cubos restantes e assim sucessivamente.

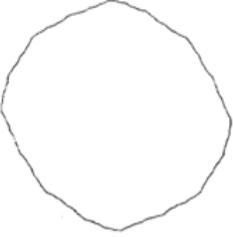
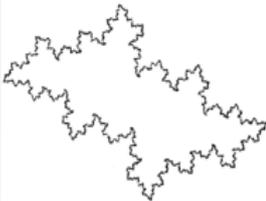
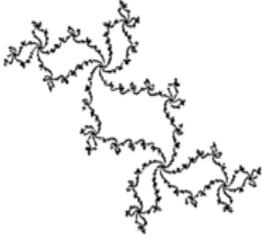
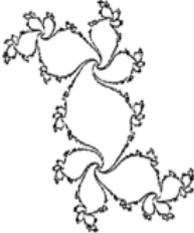
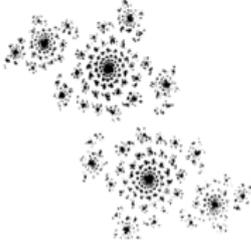
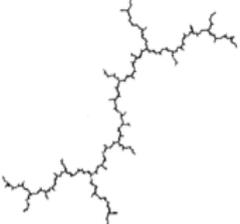
Observamos que, a cada nova iteração, a quantidade de cubos fica multiplicada por 20 e a medida da aresta é igual a $1/3$ da medida da aresta do cubo anterior. Portanto, se repetirmos n vezes o processo, teremos formado 20^n cubos com arestas medindo $\frac{1}{3^n}$ da aresta do cubo inicial.

1.2.8 Conjunto de Fatou e Julia

Na época da Primeira Guerra Mundial, em 1918, os matemáticos franceses Pierre Fatou (1878–1929) e Gaston Julia (1893–1978) publicaram trabalhos sobre o estudo de propriedades iterativas envolvendo números complexos estudadas sem o auxílio computacional. É interessante destacarmos que Fatou e Julia, embora fossem contemporâneos, não desenvolveram seus trabalhos em conjunto. Lamentavelmente, esses estudos permaneceram esquecidos até serem recuperados por Mandelbrot, ao usá-los como base para o desenvolvimento do que hoje denominamos Conjunto de Mandelbrot, cuja representação gráfica se tornou símbolo da geometria dos fractais. (BARBOSA, 2005).

Segundo Peitgen, Jürgens e Saupe (2004), Fatou e Julia exploraram o que ocorre com a imagem no plano complexo quando se emprega, iterativamente, a função $f(z) = z^2 + c$ para um z complexo inicial e c um complexo constante. Cabe salientar, para melhor compreensão, que a construção parte com um $z_0 = a_0 + ib_0$ e cada iteração parte de um z_n conhecido para obter $z_{n+1} = (z_n)^2 + c$. Relatam os autores que a sequência de pontos deve ter uma das duas características: na primeira, as órbitas convergem para a origem; e na segunda, elas tendem ao infinito. A Figura 17 apresenta algumas amostras do Conjunto de Julia.

Figura 17 – Algumas amostras do Conjunto de Julia para a função quadrática $f(z)=z^2+c$

			
$c = -0,1 + 0,1i$	$c = -0,5 + 0,5i$	$c = -1 + 0,05i$	$c = -0,2 + 0,75i$
			
$c = 0,25 + 0,52i$	$c = -0,5 + 0,55i$	$c = 0,66i$	$c = -i$

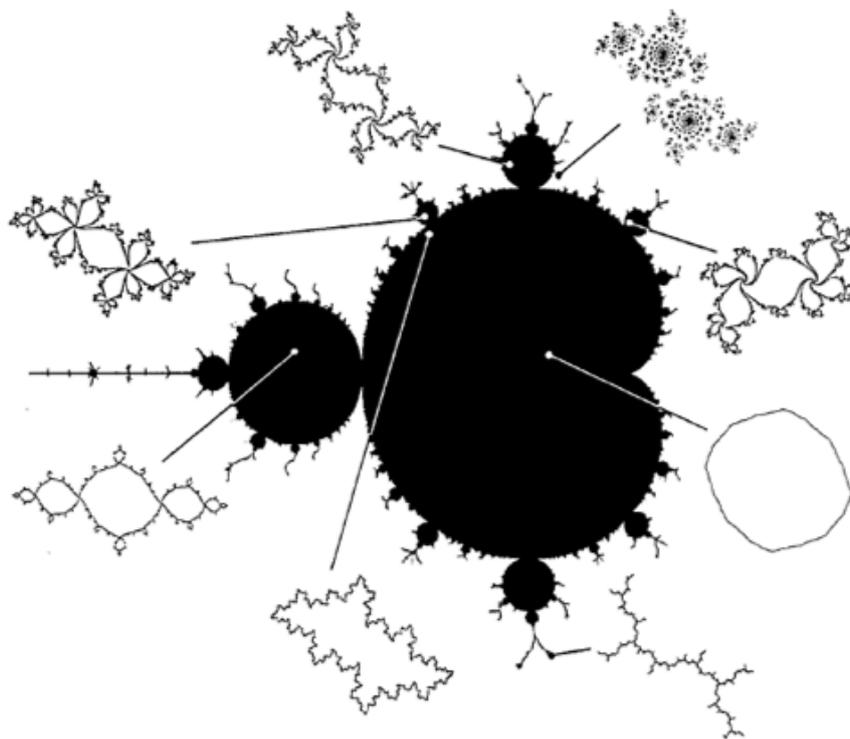
Fonte: adaptado de Falconer (2003, p. 214).

1.2.9 Conjunto de Mandelbrot

Os trabalhos de Fatou e Julia, como relata Barbosa (2005, p. 45), “forne-
ceram as bases matemáticas para Mandelbrot, que soube aproveitá-los e desen-
volvê-los com recursos computacionais para seu conjunto conhecido hoje como
Conjunto de Mandelbrot”. Negri (2014) e Moura (2016) relatam que, no final da
década de 70 (1979), Mandelbrot tentou elaborar uma forma de generalizar os
Conjuntos de Julia, no caso de funções quadráticas, com a variação do parâmetro
 c . Utilizaram isso para desenhar as regiões estudadas por Fatou e Julia de maneira
a verificar o comportamento caótico que produz a estrutura fractal. Quando nos
referimos ao termo “comportamento caótico”, o estamos atribuindo ao fenômeno
de imprevisibilidade.

Dalpiaz (2016), em sua pesquisa, resume o Conjunto de Mandelbrot como uma expressão matemática essencial para a construção de imagens dadas pela fórmula iterativa, no plano de números complexos ($z = x + iy$), expressa por $z_{n+1} = (z_n)^2 + c$. Nela, $c = a + ib$ é uma constante complexa e devemos partir de um certo valor para z_0 . O autor conclui que o Conjunto de Mandelbrot é o conjunto dos valores de c tais que, para $z_0 = 0$, a sequência de valores definida recursivamente permanece limitada. A Figura 18 apresenta o Conjunto de Mandelbrot, com a variação de c e seus correspondentes Conjuntos de Julia, apresentados anteriormente na Figura 17.

Figura 18 – Conjunto de Mandelbrot apresentando vários valores para c e seus correspondentes Conjuntos de Julia



Fonte: Falconer (2003, p. 213).

1.3 DIMENSÃO FRACTAL OU DIMENSÃO HAUSDORFF-BESICOVITCH

Uma característica dos fractais é sua dimensão. Esse número representa o grau de ocupação de um fractal no espaço, estando relacionado com o seu grau de

irregularidade. Difere da dimensão Topológica e da Euclidiana, pois seu número não é necessariamente inteiro positivo. Segundo Mucheroni (2017, p. 5), a

[...] dimensão topológica está relacionada com a forma que um conjunto tem de ocupar o espaço. Em Topologia, através de homeomorfismos, retas podem ser transformadas em curvas, círculos em quadrados, etc. Nestes casos suas dimensões topológicas são preservadas. A partir da Topologia, foram surgindo várias noções de dimensão, nas quais objetos topologicamente equivalentes sempre tenham a sua dimensão mantida e que esta seja sempre um número natural.

Segundo Lesmoir-Gordon (2010, p. 10-11, tradução nossa), o conceito de dimensão, nos moldes da Geometria Euclidiana, nos diz que:

- (a) Um segmento de reta tem dimensão 1, pois entende-se que qualquer ponto A do segmento pode ser especificado usando apenas uma coordenada, isto é, um ponto A está a uma distância de x unidades de uma extremidade do segmento.
- (b) Um quadrado tem dimensão 2, isto é, qualquer ponto A do quadrado pode ser determinado usando apenas duas coordenadas (x, y) , de sorte que x é a distância de A até o lado esquerdo e y é a distância de A até o lado inferior do quadrado.
- (c) Um cubo tem dimensão 3, pois entende-se que qualquer ponto A do cubo pode ser especificado usando apenas três coordenadas (x, y, z) , onde x, y e z representam, respectivamente, as distâncias de A até a face esquerda, a face inferior e a face traseira.

Nessa perspectiva, um ponto, isoladamente, não tem direções, portanto tem dimensão zero. Uma linha tem uma única direção, logo tem dimensão 1; no quadrado encontram-se duas direções, portanto tem dimensão 2 e, no cubo, temos três direções, logo, sua dimensão é 3. Partindo por esse viés, a dimensão de um objeto é a quantidade de coordenadas necessárias para representar, de forma única, um ponto dele. Assim, ela é um número inteiro positivo. Veremos, no decorrer deste capítulo, que a dimensão de um fractal também pode ser um número real positivo, e não somente um número inteiro positivo. Mas ela será um número real positivo qualquer? Esclareceremos isso mais adiante.

O número que representa a dimensão fractal pode ser calculado pelo método da Dimensão de Hausdorff-Besicovitch, em homenagem aos matemáticos Felix Hausdorff (1868–1942) e Abram Samoilovitch Besicovitch (1891–1970), considerados fundadores da Topologia Moderna e que contribuíram para os trabalhos de Mandelbrot. Para Reis (2014, p. 34), “Define-se então dimensão de uma curva fractal como sendo um número que caracteriza a maneira na qual a medida do comprimento entre dois pontos aumenta à medida que a escala diminui”.

Para Mandelbrot (1989, p. 14, tradução nossa), a dimensão fractal pode ser concebida com a noção de,

[...] curvas planas muito irregulares, que sua dimensão fractal se situa entre 1 e 2, a respeito de certas superfícies muito enrugadas e cheias de pregas, que a sua dimensão fractal está entre 2 e 3 e, enfim, conjuntos de pontos sobre uma linha cuja a dimensão fractal está entre 0 e 1.

Complementando a concepção de Mandelbrot para dimensão fractal, Capra (2006, p. 119) exemplifica: “Quanto mais denteados forem os contornos de um relâmpago ou as bordas de uma nuvem e, quanto mais acidentadas forem as formas de uma linha litorânea ou de uma montanha, mais altas serão suas dimensões fractais”.

Sendo assim, a dimensão de Hausdorff-Besicovitch permite calcular a dimensão dos fractais que, com a ampliação ou redução, permanecem autossemelhantes. Para entender esse processo de cálculo da dimensão fractal, utilizaremos figuras geométricas já conhecidas da Geometria Euclidiana, tomando como exemplo um segmento de reta, um quadrado e um cubo, até chegarmos à generalização da dimensão.

Tomemos um segmento de reta e o dividamos em 2, 3 e 4 partes. Então, realizemos algumas análises, conforme apresentado no Quadro 1.

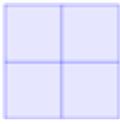
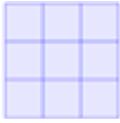
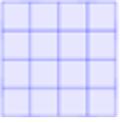
Quadro 1 – Figura obtida e relação entre o número de divisões e o fator de redução para um segmento

Figura obtida	Número de divisões (ou número de segmentos obtidos) N	Fator de redução r	Relação entre N e r $N = \frac{1}{r^1}$
	1	1	$1 = \frac{1}{1^1}$
	2	1/2	$2 = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^1}$
	3	1/3	$3 = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^1}$
	4	1/4	$4 = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^1}$

Fonte: elaborado pelos autores.

Tomemos um quadrado de lado C . Dividamos cada lado em 2, 3 e 4 partes para realizar algumas investigações, conforme apresentado no Quadro 2.

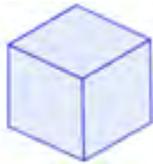
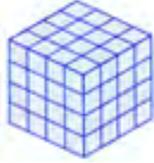
Quadro 2 – Figura obtida e relação entre o número de divisões e o fator de redução para um quadrado

Figura obtida	Número de divisões (ou número de peças geradas) N	Fator de redução r	Relação entre N e r $N = \frac{1}{r^2}$
	1	1	$1 = \frac{1}{1^2}$
	4	1/2	$4 = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}$
	9	1/3	$9 = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}$
	16	1/4	$16 = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2}$

Fonte: elaborado pelos autores.

Para finalizar os exemplos, tomemos um cubo de aresta C . Dividamos sua aresta em 2, 3 e 4 partes para realizar o estudo apresentado no Quadro 3.

Quadro 3 – Figura obtida e relação entre o número de divisões e o fator de redução para um cubo

Figura obtida	Número de divisões (ou número de peças geradas) N	Fator de redução r	Relação entre N e r $N = \frac{1}{r^3}$
	1	1	$1 = \frac{1}{1^3}$
	8	1/2	$8 = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^3}$
	27	1/3	$27 = \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^3}$
	64	1/4	$64 = \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^3}$

Fonte: elaborado pelos autores.

Analisando a divisão do segmento, do quadrado e do cubo, podemos observar que a quantidade N de partes semelhantes ao todo é igual ao inverso do coeficiente de redução (r) elevado à dimensão (D) da figura. Portanto,

$$N = \frac{1}{r^D} = \left(\frac{1}{r}\right)^D.$$

Na Geometria Euclidiana, a dimensão (D) de uma reta, ou segmento de reta é 1, enquanto quadrados são figuras bidimensionais, portanto sua dimensão

é igual a 2. Por sua vez, cubos são figuras tridimensionais, logo sua dimensão é igual a 3.

Aplicando logaritmo em ambos os lados da igualdade, $N = \left(\frac{1}{r}\right)^D$, obtaremos, após algumas manipulações algébricas, a igualdade

$$D = \frac{\log N}{\log \frac{1}{r}}.$$

Pela definição, em Geometria Euclidiana, a dimensão de um objeto pertence ao conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$. Pela definição de Hausdorff-Besicovitch, a dimensão fractal pertence ao intervalo $[0, 3]$ e, conforme estabelecido por Mandelbrot (1977), a dimensão fractal deve refletir a textura, consistência, completude e densidade. O Quadro 4 apresenta a dimensão de alguns fractais que são abordados ao longo deste trabalho.

Quadro 4 – Dimensões de alguns fractais

Fractal	Número de divisões N	Fator de redução r	Dimensão fractal $D = \frac{\log N}{\log \frac{1}{r}}$
Conjunto de Cantor	2	1/3	$D \cong 0,631$
Curva de Koch	4	1/3	$D \cong 1,262$
Triângulo de Sierpinsky	3	1/2	$D \cong 1,585$
Tapete de Sierpinsky	8	1/3	$D \cong 1,893$

Curva de Peano	9	1/3	D = 2
Curva de Hilbert	4	1/2	D = 2
Tetraedro de Sierpinsky	4	1/2	D = 2
Esponja de Menger	20	1/3	D \cong 2,727

Fonte: elaborado pelos autores.

Assim, a dimensão de Hausdorff-Besicovitch é válida para calcular a dimensão de quaisquer objetos, sejam figuras euclidianas com dimensão inteira positiva, ou fractais com dimensão fracionária ou inteiras. Cabe destacar que nem sempre a dimensão dos fractais é fracionária, mas essa é uma característica que as figuras euclidianas não possuem.

CAPÍTULO 2

OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Neste capítulo, estruturamos os aspectos relativos ao referencial teórico que fundamenta nossa pesquisa, ou seja, os Registros de Representação Semiótica (RRS). No decorrer da discussão, apresentamos seus elementos que consideramos relevantes para a pesquisa. Tal teoria aborda aspectos cognitivos da aprendizagem, além de analisar os meios pelos quais o aluno pode ter acesso ao objeto matemático.

Raymond Duval é filósofo e psicólogo de formação, desde a década de 70, desenvolvendo pesquisas associadas com a psicologia cognitiva, o que tem contribuído para os estudos na área de Educação Matemática. No período de 1970 a 1995, ele esteve vinculado ao Instituto de Pesquisa sobre o Ensino de Matemática (IREM), na França, na cidade de Estrasburgo. Atualmente, é professor emérito em Ciências da Educação da *Université du Littoral Côte d'Opale*, na cidade de *Boulogne-sur-mer*, residindo em *Lille*, cidade essa situada ao norte da França. (FREITAS; REZENDE, 2013).

Machado (2010) relata que, dentre a vasta produção de Duval, a obra intitulada “*Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*”, publicada em 1995, foi o ponto de partida para sua teoria, por tratar-se da primeira apresentação sistematizada do pensamento do autor.

Segundo Duval (2010, p. 11), o objetivo da Matemática é “contribuir para o desenvolvimento geral de capacidades de raciocínio, de análise e de visualização”. Ele destaca que, para haver a compreensão Matemática, se faz necessária uma abordagem cognitiva, porém essa deve buscar retratar os processos de aquisição de conhecimentos que possibilitem ao aluno compreender, efetuar e controlar a variedade dos procedimentos matemáticos que lhe são propostos em situações de ensino. Outro ponto que o autor salienta é a existência de duas características essenciais para atividades cognitivas necessárias para a Matemática: a importância das representações semióticas e a diversidade das utilizadas em Matemática.

Corroborando essa ideia de diversidade de representações, André (2011) relata a necessidade de levar em consideração as diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático. Para a autora, não existe conhecimento matemático que possa ser mobilizado por uma pessoa sem o auxílio de uma representação. Os conceitos matemáticos são cognitivamente diferentes dos de outras ciências, não são diretamente perceptíveis ou observáveis, muitas vezes necessitando de representações semióticas para suas aprendizagens. (MAGGIO; NEHRING, 2012).

Diante da quantidade de sistemas semióticos, se faz necessário distinguir entre objeto e sua representação. Para Duval (2009), existem duas atividades cognitivas entre o objeto e a sua representação, sendo uma relacionada à representação do objeto matemático e outra, ao próprio objeto. Ele denomina *semiósis* para dar conta da apreensão ou produção de uma representação semiótica, enquanto *noésis* seria a responsável pelos atos cognitivos ligados à apreensão conceitual de um objeto. Segundo o autor, as representações semióticas caracterizam-se por

[...] serem relativas a um sistema particular de signos, como a linguagem, a escrita algébrica ou os gráficos cartesianos, e em poderem ser convertidas em representações “equivalentes” em outro sistema semiótico, mas podendo tomar significações diferentes para os sujeitos que as utilizam. (DUVAL, 2009, p. 32).

Para ocorrer a aprendizagem, se faz necessária a apreensão de um determinado objeto matemático, ou seja, deve ocorrer a *noésis* por meio de significativas *semiósis*. A aprendizagem só ocorrerá quando o aluno conhecer os diferentes RRS de um determinado objeto.

A esse respeito, Damm (2012, p. 177) postula:

para que ocorra a apreensão de um objeto matemático, é necessário que a *noésis* (conceitualização) ocorra através de significativas *semiósis* (representações). A apreensão conceitual dos objetos matemáticos somente será possível com a coordenação, pelo sujeito que aprende, de vários registros de representação.

Um sistema semiótico é um conjunto de signos que possui finalidade de se comunicar e dar significado. Para Santaella (2012), o signo é um substituto ou representante de um objeto. Conforme a autora, não é o objeto nem o representa em sua totalidade, mas sim cria a ideia de um equivalente. Damm (2012) exemplifica sistemas semióticos, na Matemática, como o sistema de numeração, a escrita algébrica, a representação gráfica, entre outros.

Por exemplo, quando trabalhamos com as funções, os gráficos, as tabelas e as equações são todos registros parciais desse objeto. Cada um desses registros é parcial e possui uma especificação própria. Perceber essas especificidades a cada registro e reforçá-los é um caminho para o entendimento do objeto como um todo. (DAMM, 2012, p. 185).

Na Matemática nem sempre trabalhamos com objetos concretos, pelo contrário, às vezes o fizemos com os abstratos. Diante dessa realidade, recorreremos ao uso de uma representação para sua compreensão auxiliar, seja mediante o uso de tabelas, gráficos ou algoritmos. Segundo Breunig, Nehring e Pozzobon (2010), é interessante apresentar aos alunos situações de ensino que possam estimular identificação, utilização e mobilização de diferentes RRS a partir dos conceitos.

A teoria de Duval (2010) é estabelecida como produções concebidas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representação, sendo que esses se referem ao uso da linguagem (símbolos, códigos, gráficos, entre outros), os quais possuem suas dificuldades próprias de significado e de funcionamento. Segundo Vertuan (2007, p. 21),

o termo “registro de representação semiótica” é usado para designar os diferentes tipos de representações semióticas. As representações em língua natural, tabular, gráfica, figural e algébrica são exemplos de tipos diferentes de representação. Cada uma delas consiste num registro de representação diferente (ou sistema de representação).

Para Machado (2010), os RRS estabelecem uma importante ferramenta que discorre sobre a aquisição de conhecimentos matemáticos e a organização de situações de aprendizagem desses conhecimentos.

Duval (2009) classificou as representações em três categorias (sejam elas conscientes ou não-conscientes): mentais; internas ou computacionais; e semióticas. No Quadro 5, apresentamos os tipos e funções das representações.

Quadro 5 – Tipos e funções das representações

	Interna	Externa
Consciente	<p>mental função de objetivação</p>	<p>semiótica função de objetivação função de expressão função de tratamento intencional</p>
Não-consciente	<p>computacional função de tratamento automático ou quase instantâneo</p>	

Fonte: Duval (2009, p. 43).

As representações mentais são internas e cumprem a função de objetivação. Consistem em um conjunto de imagens e concepções que um indivíduo pode ter de um objeto, de uma situação ou aquilo que está associado a ele ou à situação. Essas representações estão correlacionadas à interiorização das representações externas. (DUVAL, 2009). Damm (2012) relata que tais representações são referidas às ideias, às crenças, às explicações do indivíduo em relação a determinado fenômeno e apresenta, como exemplo, as fantasias relacionadas à água, ao fogo, ao ar, as quais são provenientes das representações mentais.

Para Duval (2009), as representações computacionais, internas e não-conscientes, são aquelas caracterizadas pela execução de tarefas automaticamente, sem pensar em todas as etapas necessárias para sua realização. Segundo Damm (2012, p. 172), “[...] o sujeito acaba executando certas tarefas sem pensar em

todos os passos necessários para a sua realização (por exemplo, os algoritmos computacionais, ou mesmo os algoritmos das operações)”.

Por sua vez, as representações semióticas são produções concebidas a partir do emprego de signos, próprios de um sistema de referência associado a um conceito ou a um conjunto de conceitos. Como exemplos dessas representações, temos a escrita algébrica, os gráficos cartesianos, as tabelas e as figuras geométricas, todos possuindo suas dificuldades próprias de significado e funcionamento. (DUVAL, 2009). A representação semiótica, para o autor, por ser externa, exerce tanto a função de comunicação quanto de funções cognitivas. Em outras palavras, é por meio das representações semióticas que o indivíduo vai exteriorizar, comunicar e objetivar seu pensamento.

Duval (2009) ainda destaca a dualidade das representações semióticas, a forma (o representante) e o conteúdo (o representado). Para o autor, o tratamento dos conhecimentos depende da forma e não do conteúdo envolvido, em que a atividade Matemática consiste na transformação das representações semióticas e a mobilização de diferentes representações para o mesmo objeto. Segundo Duval (2011, p. 68) “o que é essencial em uma representação semiótica são as transformações que se pode fazer e não a própria representação”. Logo, essas representações semióticas podem possuir naturezas distintas, dependendo de qual aspecto do objeto matemático queremos evidenciar.

Ao tratar da natureza dos RRS, Duval (2010) organiza duas classificações, os registros multifuncionais e os registros monofuncionais, aos quais estão relacionadas as representações discursivas e as representações não-discursivas, conforme apresentado no Quadro 6.

Quadro 6 – Quadro da classificação dos diferentes registros mobilizáveis no funcionamento matemático

	Representação Discursiva	Representação Não Discursiva
<p>REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: Os tratamentos não são algoritmizáveis.</p>	<p>Língua Natural Associações verbais (conceituais) Forma de raciocinar: argumentação a partir de observações, de crenças; dedução válida a partir de definições ou uso de teoremas.</p>	<p>Figuras geométricas planas ou em perspectiva. Apreensão operatória e não somente perceptiva; construção com instrumentos.</p>
<p>REGISTROS MONOFUNCIONAIS: Os tratamentos são principalmente algoritmos.</p>	<p>Sistemas de escrita: numéricas (binária, decimal, fracionária); algébricas; simbólicas (línguas formais). Cálculo.</p>	<p>Gráficos cartesianos. Mudanças de sistemas de coordenadas; interpolação, extrapolação.</p>

Fonte: Duval (2010, p. 14).

Observando o Quadro 6, temos dois tipos de registros: os multifuncionais e os monofuncionais. Nos primeiros, não se utilizam os algoritmos, os quais possuem uma representação discursiva (envolvem a língua natural, associações verbais e forma de raciocinar) ou uma representação não discursiva (envolvem as figuras geométricas). Já os registros monofuncionais utilizam os algoritmos, que também possuem uma representação discursiva (envolvem as escritas numéricas, algébricas e simbólicas, além do cálculo), ou representação não discursiva (envolvem os gráficos cartesianos). Portanto, para cada um dos registros monofuncionais ou multifuncionais, existe uma nova subdivisão de registros que são a representação discursiva ou a representação não discursiva.

Segundo Duval (1995), um sistema de representação semiótica é considerado um RRS quando permite três atividades cognitivas:

- a) a formação de uma representação identificável;
- b) o tratamento de um registro de representação;
- c) a conversão de um registro de representação.

Quando identificamos na representação o objeto que ela representa, dizemos que ela é identificável. Segundo Duval (2009, p. 53), a formação de uma representação identificável “implica sempre uma seleção no conjunto de caracteres e determinações que queremos representar”. Essa representação pode ser dada, por exemplo, na composição de um texto, no desenho de uma figura geométrica, na escrita de uma fórmula, de um gráfico, entre outros.

O tratamento de um registro de representação implica transformar a representação do objeto matemático conservando o próprio registro de origem, caracterizando, assim, uma transformação interna a um registro. Para Duval (2010, p. 16),

os tratamentos são transformações de representações dentro de um mesmo sistema de representação: por exemplo, efetuar um cálculo ficando estritamente no mesmo sistema de escrita ou de representação dos números; resolver uma equação ou um sistema de equações; completar uma figura seguindo critérios de conexidade e simetria.

Corroborando essa ideia, Henriques e Almouloud (2016, p. 469) definem tratamento de uma representação como “transformação desta em outra representação no mesmo registro no qual foi formada. O tratamento é, portanto, uma transformação interna num registro”.

Já a conversão de um registro de representação em outro, segundo Duval (2009, p. 58), consiste em “transformar um registro de representação de um objeto, de uma situação ou de uma informação dada, num registro de representação usando outro sistema de representação”. Corroborando isso, Damm (2012, p.

180) explica que essa conversão ocorre “conservando a totalidade ou parte do objeto matemático em questão”. Para Henriques e Almouloud (2016, p. 469), “a conversão de uma representação é a transformação desta representação em uma representação de outro registro”.

Duval (2010) relata que o ato de mudar o sistema de representação de um objeto matemático é um mecanismo que leva à compreensão, uma vez que cada sistema semiótico tem suas particularidades e especificidades representacionais. Além disso, o autor, afirma que, para analisar atividades matemáticas, sob a luz do ensino e da aprendizagem, se faz indispensável fazer uma abordagem cognitiva a respeito dos dois tipos de transformações de representações: os tratamentos e as conversões. Portanto, segundo o autor, a conversão é uma atividade cognitiva diferente e independente do tratamento.

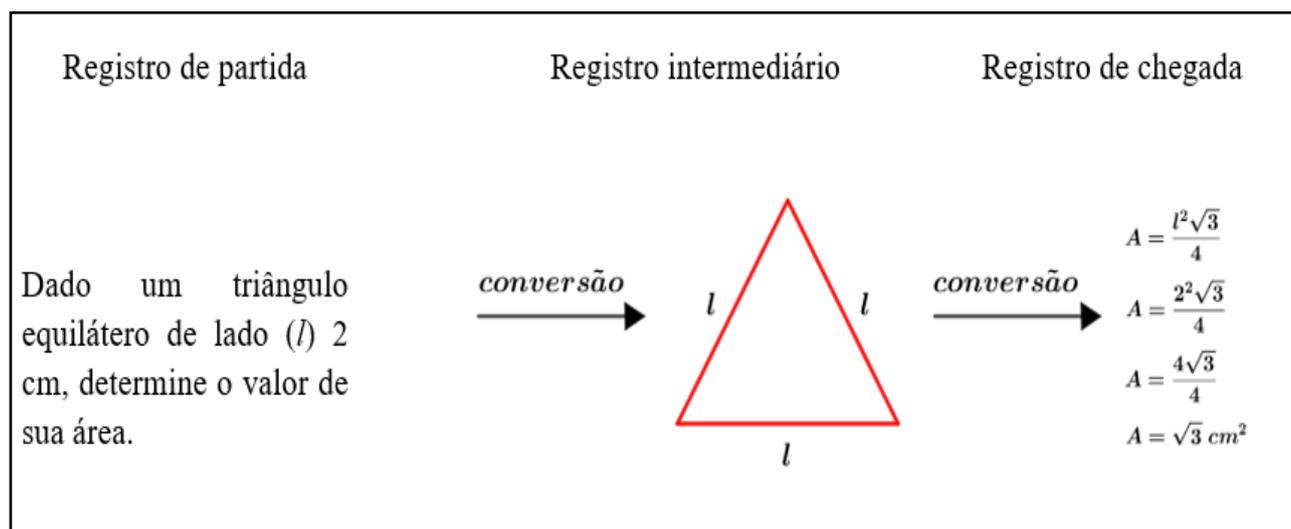
Os tratamentos são operações que abrangem transformações internas de registros e ocorrem no mesmo sistema semiótico de representação. Por exemplo, reconhecer um trapézio dentre seus diferentes tipos de representações figurais. Para Duval (2009, p. 57),

um tratamento é uma transformação de representação interna a um registro de representação ou a um sistema. O cálculo é um tratamento interno ao registro de uma escritura simbólica de algarismo e de letras: ele substitui novas expressões em expressões dadas do mesmo registro de escritura de números.

A partir dessas observações preliminares, consideramos que os tratamentos estão relacionados à forma e não ao conteúdo do objeto matemático. Duval (2009) apresenta que a conversão é uma transformação externa em relação ao registro da representação inicial, “a conversão das representações semióticas constitui a atividade cognitiva menos espontânea e mais difícil de adquirir para a grande maioria dos alunos”. (p. 63).

A Figura 19 ilustra uma conversão em que sistemas de representações diferentes são mobilizados para representar o objeto área de um triângulo equilátero. Para esse exemplo, utilizamos um triângulo equilátero de lado medindo 2 cm.

Figura 19 – Exemplo de conversão em RRS

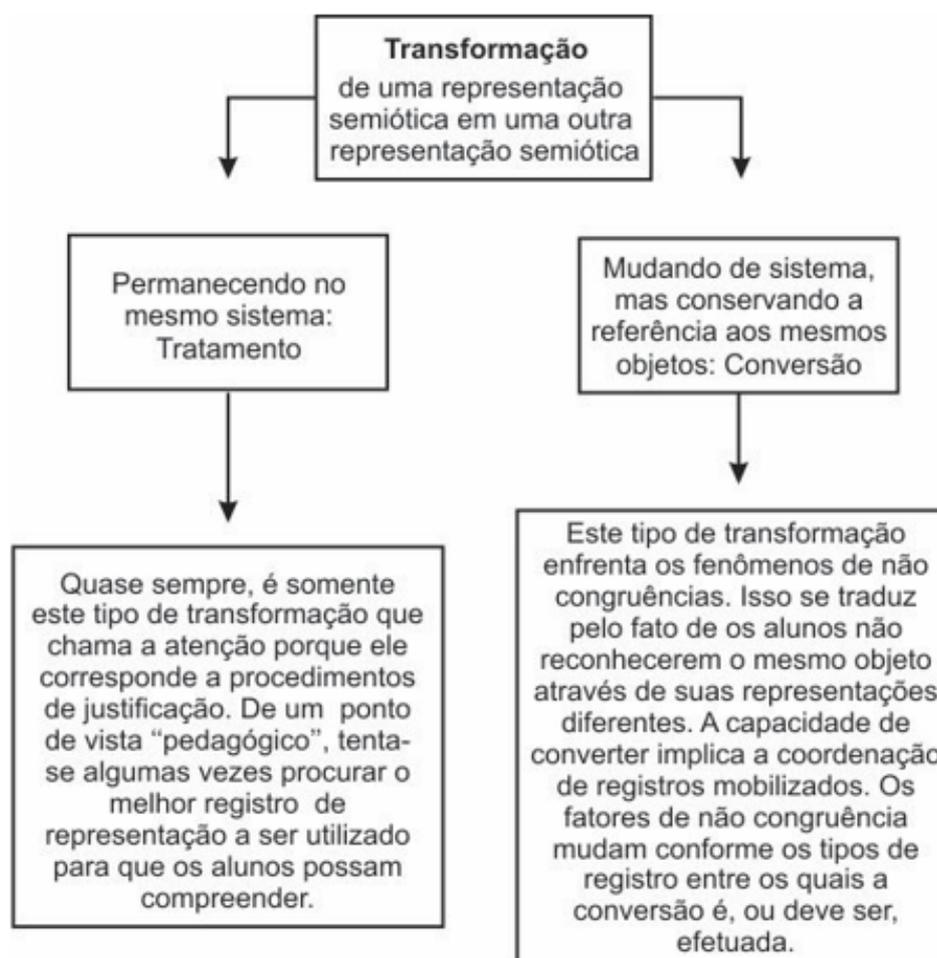


Fonte: elaborada pelos autores.

O exemplo demonstra a transformação de um Registro da Língua Natural (RLN), registro de partida, para o Registro Figural (RF), registro intermediário, e do RF para o Registro Simbólico (RS), registro de chegada. Como todas essas representações pertencem a sistemas semióticos diferentes, a movimentação de uma para a outra é praticável pela atividade cognitiva de transformá-las por intermédio das conversões.

A Figura 20 resume a diferença existente entre tratamento e conversão para a análise do funcionamento cognitivo da compreensão dos dois tipos diferentes de transformações de representações semióticas.

Figura 20 – Tipos de transformação de representações semióticas



Fonte: Duval (2010, p.15).

Duval (2010) alerta que um registro completa o outro, isto é, mesmo que um registro de representação retrate um dado objeto, ele será parcial, pois os conteúdos envolvidos em questão são diferentes. “Porque passar de um registro de representação a outro não é somente mudar de modo de tratamento, é também explicar as propriedades ou os aspectos diferentes de um mesmo objeto”. (p. 22).

Do ponto de vista matemático, a conversão intervém somente para escolher o registro no qual os tratamentos a serem efetuados são mais econômicos, mais potentes, ou para obter um segundo registro que serve de suporte ou de guia aos tratamentos que se efetuam em um outro registro. [...] Mas do ponto de vista cognitivo, é a atividade de conversão que, ao contrário, aparece como atividade de transformação representacional fundamental, aquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão. (DUVAL, 2010, p. 16).

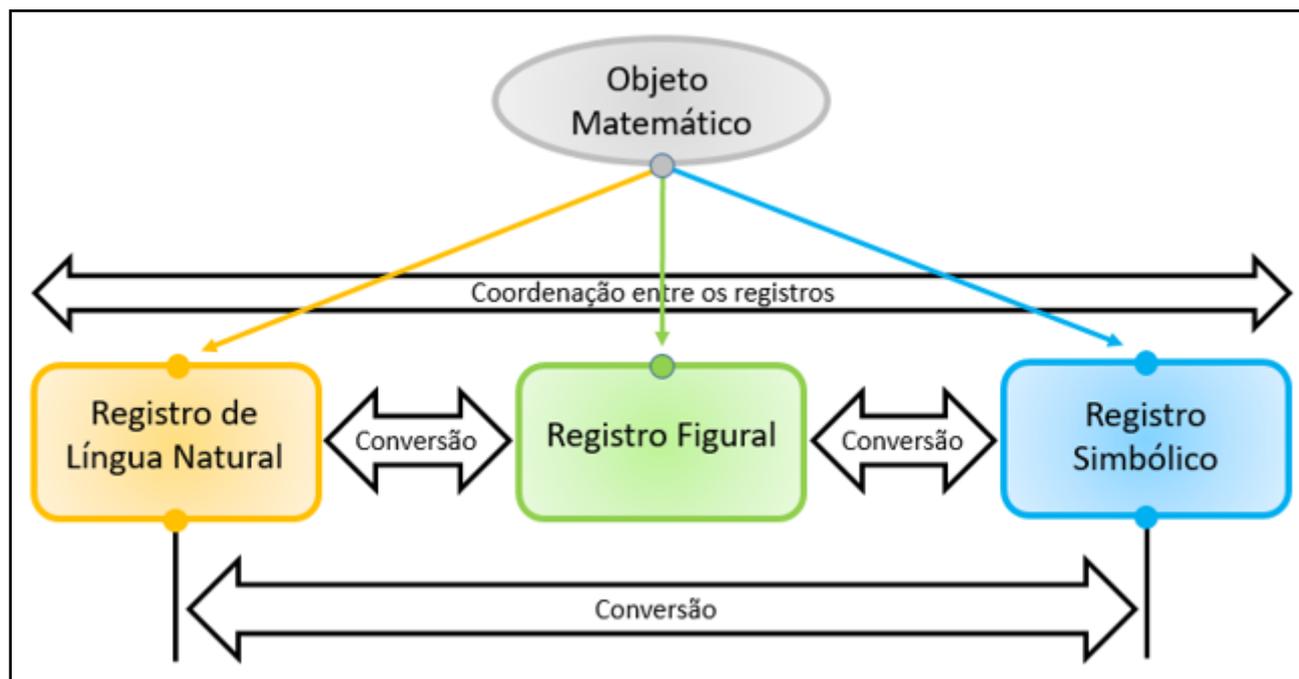
Para o autor, a compreensão do objeto estudado está ligada às relações estabelecidas entre os diferentes registros, compreendendo as particularidades de cada um. Por exemplo, um RLN não oferece as mesmas possibilidades de representação de uma expressão algébrica ou de um gráfico. Cada um desses registros possui uma característica própria. Entender essas características é um caminho para a compreensão do objeto como um todo. Portanto, percorrendo os diferentes registros associados a um objeto matemático, definimos a coordenação entre eles. Segundo Henriques e Amouloud (2016, p. 470), a coordenação “[...] é a manifestação da capacidade do indivíduo em reconhecer a representação de um mesmo objeto, em dois ou mais registros distintos”.

Segundo Damm (2012), toda a comunicação estabelecida na Matemática faz-se com base em representações, em que os objetos estudados podem ser conceitos, propriedades, estruturas, relações que podem expressar diferentes formas de representações semióticas. Ela destaca que a Matemática trabalha com objetos abstratos, isto é, não são objetos diretamente perceptíveis, necessitando para sua apreensão o uso de outras formas de representações, sejam essas, por exemplo, símbolos, tabelas, gráficos, algoritmos ou desenhos, pois permitem a comunicação entre os sujeitos e as atividades cognitivas do pensamento matemático. Entretanto, para compreensão da Matemática, é fundamental que o aluno faça a distinção entre o objeto matemático e sua representação.

Diante do exposto, podemos dizer que os RRS, segundo Duval (2010), distinguem-se das demais por considerar a importância da mobilização de diferentes registros de representação para a apreensão de um objeto matemático: o RLN, o RF e o RS¹, os quais, juntamente com as respectivas conversões, serão explorados na análise dos dados da pesquisa (Figura 21).

¹ Para uma melhor organização, optamos por agrupar os registros algébricos e numéricos, que possam aparecer nessa pesquisa, junto aos registros simbólicos.

Figura 21 – Tipos de registros utilizados na pesquisa



Fonte: elaborada pelos autores.

Perante o apresentado, interessamo-nos em investigar, por meio das atividades elaboradas, a construção de saberes de Geometria Fractal, na qual os RRS fornecerão um referencial estruturado da análise do funcionamento cognitivo dos alunos envolvidos na pesquisa diante de uma situação de ensino envolvendo esse objeto matemático.

CAPÍTULO 3

AS TECNOLOGIAS DIGITAIS NO ENSINO DE MATEMÁTICA

Vivemos em uma sociedade em que o indivíduo tem acesso aos mais variados meios e formas de tecnologias. Não podemos deixar de lado essa realidade, pois, segundo Almeida (2000, p. 77), o educador deve “[...] promover a aprendizagem do aluno para que ele possa construir o conhecimento dentro de um ambiente que o desafie e o motive para a exploração, a reflexão, a depuração de ideias e descobertas [...]” e o uso das Tecnologias Digitais (TD) vem ao encontro dessa realidade.

Optamos por utilizar o termo TD pautando em dois autores, Almeida (2007) e Valente (2005). Para Almeida (2007, p. 3), TD “[...] é um conceito polissêmico que varia seguindo o contexto e a perspectiva teórica do autor, podendo ser vista como: artefato, cultura, atividade com determinado objeto, processo de criação, conhecimento sobre uma técnica e seus respectivos processos”. Já para Valente (2005, p. 23) as TD são o resultado da concentração de “diferentes mídias em um só artefato”, como por exemplo, o vídeo, o computador, o celular, realidade virtual, entre outros.

As mais variadas formas de tecnologias estão presentes em nossa cultura e em nosso cotidiano, criando novas possibilidades de expressão e comunicação, cabendo a nós, professores, sabermos escolher e estudar sua aplicação na sala de aula.

A realidade tecnológica está presente em nosso cotidiano, podendo nos apoderarmos de metodologias para a atuação profissional. Lèvy (1995, p. 9) afirma que a Informática é um “campo de novas tecnologias intelectuais, aberto, conflituoso e parcialmente indeterminado”. Pensando por esse viés, o uso das TD passa a ser uma realidade e cabe aos professores refletirem sobre possibilidades dessa inserção em suas aulas. Na mesma direção, Perrenoud (2002, p. 89) relata que: “as reformas atuais confrontam os professores com dois desafios: reinventar sua escola enquanto local de trabalho e reinventar a si próprios enquanto pessoas e

membros de uma profissão”. Dessa forma, o uso das TD, em especial o emprego do computador, requer das instituições de ensino e do professor novas posturas para a realidade.

Acreditamos que a utilização de recursos tecnológicos digitais, especialmente na Educação Matemática, deva ser pensada como um recurso que possa melhorar os processos de ensino e de aprendizagem. De acordo com Bacich, Neto e Trevisani (2015, p. 41), “o uso de tecnologias digitais no contexto escolar propicia diferentes possibilidades para trabalhos educacionais mais significativos para os seus participantes”. Mas, para essa ocorrência, os educadores devem estar constantemente pesquisando e atualizando suas metodologias de ensino. Para Kenski (2012), as TD não mudam apenas as formas de produção, organização e difusão da informação, mas a maneira como percebemos e entendemos o mundo. Corroborando essa ideia, Gravina e Basso (2012, p. 12) relatam que:

nossas rotinas de sala de aula também deveriam incorporar, cada vez mais, as tecnologias, pois elas também influenciam nas nossas formas de pensar, de aprender, de produzir. O “giz e quadro-negro” é uma tecnologia que teve seu momento de impacto no processo educativo, no século XIX. Com o crescimento das cidades, decorrente da Revolução Industrial, a necessidade da educação em massa consolida a organização da sala de aula em grandes grupos com atenção voltada para a “fala” do professor. [...]

Ainda, segundo os dois autores, o uso das TD é um excelente recurso metodológico nas aulas de Matemática, pois pode disponibilizar ferramentas interativas que criam objetos dinâmicos e manipuláveis, contribuindo no processo de aprendizagem e desenvolvimento cognitivo dos alunos.

Para esta pesquisa, utilizamos o computador, destacando que ele não é um instrumento que ensina, mas apenas uma ferramenta que auxilia o aluno a desenvolver algo. Sendo assim, o aprendizado deverá ocorrer por intermédio do computador, quando o aluno realizar alguma tarefa designada pelo professor. Gravina (2001, p. 4-5) declara que:

tecnologia informática apresenta-se como um meio a dar suporte ao pensar, possibilitando “mudar os limites entre o concreto e o formal”, já que “o computador permite criar um novo tipo de objeto – os objetos “abstratos-concretos”; concretos porque existem na tela do computador e podem ser manipulados; abstratos por se tratarem de realizações feitas a partir de construções mentais”. Assim, a tecnologia informática transmuta-se em tecnologia da inteligência – termo cunhado por LEVY – abarcando a possível versatilidade e até mesmo a ampliação dos funcionamentos cognitivos.

O uso dessa tecnologia deve auxiliar o enriquecimento do ambiente educacional, possibilitando a construção de conhecimentos por meio de uma ação ativa, crítica e criativa, tanto por parte dos estudantes, como dos educadores. Papert (1994) defende o uso do computador por acreditar que ele é eficaz no desenvolvimento cognitivo, além de acelerar a passagem do pensamento infantil para o adulto. Para Oliveira *et al.* (2001, p. 32),

o uso da informática na educação exige em especial um esforço constante dos educadores para transformar a simples utilização do computador numa abordagem educacional que favoreça efetivamente o processo de conhecimento do aluno. Dessa forma, a sua interação com os objetos da aprendizagem, o desenvolvimento de seu pensamento hipotético dedutivo, da sua capacidade de interpretação e análise da realidade tornam-se privilegiados e a emergência de novas estratégias cognitivas do sujeito é viabilizada.

Acreditamos que seja importante a familiarização do aluno com o computador, pois pode gerar uma série de oportunidades de expansão dos conhecimentos, além de promover sua autonomia. Segundo Lèvy e Moraes (2001, p. 132), “é na escola que o indivíduo tem a oportunidade do aprendizado interativo e cooperativo, sendo o principal canal de acesso para a inclusão e cidadania”. Além disso, os autores descrevem que o computador propicia, atualmente, a aprendizagem, ao mesmo tempo, do professor e do aluno, promovendo uma atualização contínua de seus saberes pedagógicos. Com a introdução das TD, Tarja (2001, p. 114) salienta que

o professor deve estar aberto para mudanças, principalmente em relação à sua nova postura: a de facilitador e coordenador do processo de ensino e aprendizagem; ele precisa aprender a aprender, a lidar com as rápidas mudanças,

ser dinâmico e flexível. Acabou a esfera educacional de detenção do conhecimento, do professor “sabe tudo”.

Ainda, segundo o autor, é necessária a capacitação do educador desde o início de sua formação acadêmica, para que, quando surgirem obstáculos, esse profissional seja capaz de superá-los. Reforçando esse pensamento, Porto (2006, p. 44) sugere ser fundamental que os ambientes escolares insiram as “[...] informações presentes nas tecnologias às próprias ferramentas tecnológicas, articulando-as com os conhecimentos escolares e propiciando a interlocução entre os indivíduos”. Nessa perspectiva, fica evidenciado o papel do educador para incorporar na escola as inovações existentes na sociedade. Para Borba e Penteado (2010, p. 66),

aspectos com incerteza e imprevisibilidade, geradas num ambiente informatizado, podem ser vistos como possibilidades para desenvolvimento: desenvolvimento do aluno, desenvolvimento do professor, desenvolvimento das situações de ensino e aprendizagem.

Entretanto, o computador é apenas uma máquina que depende do indivíduo para fazer uma programação e realizar certa atividade. Com esse intuito, escolhemos um *software* de Geometria Dinâmica (GD) para realizar a pesquisa, o *GeoGebra*. O termo GD é entendido como um “ambiente oferecido por *softwares* que possibilitam manipular construções e objetos geométricos na tela do computador” (PEREIRA, 2012, p. 26). Na perspectiva de utilização da GD, Gravina (1996, p. 13) destaca que:

quanto às atitudes dos alunos frente aos processos de aprender: experimentam; criam estratégias; argumentam e deduzem propriedades matemáticas. A partir da manipulação concreta, “o desenho em movimento”, passam para a manipulação abstrata atingindo níveis mentais superiores da dedução e rigor, e dessa forma entendem a natureza do raciocínio matemático.

Segundo Bairral (2009, p. 26), a GD apresenta contribuições como “[...] a interação do sujeito com a TIC¹; a descoberta mediante tentativa e erro; a observação, o levantamento e verificação de conjecturas, bem como as diferentes

¹ TIC – Tecnologias da Informação e Comunicação.

formas (não estáticas) de representação do objeto em estudo”. Também, podemos destacar outros pontos positivos como a facilidade na construção geométrica, a dinamicidade na visualização e na verificação de propriedades.

Para Gravina (1996), o uso de *softwares* de GD pode melhorar o processo de aprendizagem dos alunos, uma vez que eles partem de um processo estático, apresentado pelos livros didáticos e o quadro-negro, e chegam a um processo de construção do conhecimento, por meio de explorações, conjecturas, argumentações e demonstrações. Além disso, ela apresenta dois aspectos didáticos importantes para o uso dos *softwares* de Geometria.

Dois são os principais aspectos didáticos para a utilização dos programas: a) os alunos constroem os desenhos dos objetos ou configurações, quando o objetivo é o domínio de determinados conceitos através da construção; b) recebem desenhos prontos, projetados pelo professor, sendo o objetivo as descobertas de invariantes através da experimentação e, dependendo do nível da escolaridade dos alunos, num segundo momento, trabalham as demonstrações dos resultados obtidos experimentalmente. (GRAVINA, 1996, p. 7).

Borba, Silva e Gadanidis (2014) destacam que “[...] é fundamental explorarmos não somente os recursos inovadores de uma tecnologia educacional, mas a forma de uso de suas potencialidades com base em uma perspectiva educacional”. Desse modo, ao utilizarmos um *software* de GD, os objetos matemáticos ganham dinamicidade e dependência entre as representações, fazendo com que o aluno desenvolva um olhar sobre seu processo de aprendizagem.

Nesse sentido, Melo e Silva (2013, p. 14) afirmam que “o *GeoGebra* proporciona condições que permitem a elaboração de situações onde o próprio aluno constrói conhecimentos”, corroborando com a ideia de que essa é uma ferramenta capaz de propiciar mais autonomia aos alunos. Ele é um *software* livre² e de código aberto³, voltado para a aprendizagem de Matemática, estabelece uma

² *Software* livre é uma expressão utilizada para designar qualquer programa de computador que pode ser executado, copiado, modificado e redistribuído pelos usuários gratuitamente.

³ O código aberto é um termo que se refere a um *software* cujo código está disponível para download por qualquer pessoa e a uma filosofia de criação de aplicativos voltada para a colaboração entre desenvolvedores.

relação entre a Geometria (*Geo*) e a Álgebra (*Gebra*). É considerado de GD, pois possibilita a movimentação de entes geométricos (por exemplo, pontos, retas, segmento de reta, entre outros), mantendo as propriedades geométricas em sua construção. O *GeoGebra* é gratuito e pode ser encontrado em <www.geogebra.org>, podendo ser utilizado de forma *online*, diretamente na página do programa na rede, ou *off-line*, com a instalação no computador. (PERLIN, 2010). Ainda, existe a possibilidade de ser instalado e utilizado em dispositivos móveis, como *tablets* e celulares.

CAPÍTULO 4

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS DA PESQUISA

Neste capítulo, descrevemos a natureza da pesquisa na busca de atingir os objetivos propostos, assim como definimos os procedimentos para a escolha dos participantes, a elaboração dos instrumentos de coleta das informações e a realização da análise dos dados.

4.1 A NATUREZA DA PESQUISA

A metodologia de pesquisa adotada para este estudo é a qualitativa de cunho interpretativo. Segundo Goldenberg (1999), a preocupação do pesquisador, em uma pesquisa qualitativa, é com o aprofundamento da compreensão do fenômeno e não com sua representatividade numérica. Ao empregar a abordagem qualitativa, almejamos compreender o modo como os alunos, em uma situação específica, pensam, agem e buscam a generalização de conteúdos matemáticos. Já na concepção de Garnica (2004, p. 86),

o adjetivo “qualitativa” estará adequado às pesquisas que reconhecem: (a) a transitoriedade de seus resultados; (b) a impossibilidade de uma hipótese *a priori*, cujo objetivo da pesquisa será comprovar ou refutar; (c) a não neutralidade do pesquisador que, no processo interpretativo, se vale de suas perspectivas e filtros eventuais prévios dos quais não consegue se desvencilhar; (d) que a constituição de suas compreensões dá-se não como resultado, mas numa trajetória em que essas mesmas compreensões e também os meios de obtê-las podem ser (re)configurados; (e) a impossibilidade de estabelecer regulamentações, em procedimentos sistemáticos, prévios, estáticos e generalistas.

A esse respeito, Bogdan e Biklen (1994) relatam que as investigações qualitativas apresentam algumas características fundamentais, como o interesse maior pelo processo do que pelos resultados ou produtos, a importância do significado atribuído pelos sujeitos às suas ações e a descrição minuciosa. Nesse sentido, os autores afirmam que “a abordagem da investigação qualitativa exige que o mundo seja examinado com a ideia de que nada é trivial, que tudo tem potencial para construir uma pista que nos permita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do nosso objeto de estudo”. (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 49). Eles destacam cinco características fundamentais para uma pesquisa qualitativa.

Característica 1 – O ambiente natural como fonte de dados e o pesquisador como instrumento fundamental de coleta de dados. É possível coletar os dados com a utilização de equipamento de vídeo ou áudio. Entretanto, muitos se limitam a utilizar tão somente um caderno e caneta para anotações. Mesmo quando utilizam o equipamento, os dados são recolhidos em situação real e complementados pela informação obtida por meio do contato direto.

Em nosso caso, o contexto investigativo compreende discentes de um curso de licenciatura em Matemática do IFFar – Campus Alegrete. A coleta de dados se dá por meio dos registros realizados por eles. Além disso, também utilizamos diário de campo do pesquisador.

Característica 2 – A investigação qualitativa é descritiva. Os dados coletados não são em forma de números, e sim de palavras ou imagens, as quais podem compreender descrições de entrevistas, notas de campo, fotos, vídeos, entre outros instrumentos.

Nesta pesquisa, os dados qualitativos compreendem os escritos realizados pelos discentes e/ou as construções realizadas no *GeoGebra*. Salientamos que poderão ocorrer algumas correções gramaticais ou mesmo textuais, mediante a aprovação do sujeito da pesquisa.

Característica 3 – Os pesquisadores estão preocupados com o processo, e não simplesmente com os resultados e o produto. A proximidade dos pesquisadores com o campo investigativo proporciona um acompanhamento constante do objeto investigado. Dessa forma, alguns detalhes considerados irrelevantes podem ser percebidos e evidenciados ao longo da pesquisa como elementos responsáveis por determinados acontecimentos.

Em nosso caso, após realizado um extenso levantamento bibliográfico na temática abordada na revisão de literatura (Geometria Fractal), seguido de reflexões e de produções textuais dos autores pesquisados, a coleta de dados por meio do material escrito do discente deverá ser lenta e criteriosa, para que os cuidados metodológicos necessários a esse tipo de coleta sejam respeitados.

Característica 4 – Os pesquisadores têm de analisar seus dados indutivamente. Ou seja, partir de uma situação particular para um plano geral.

Para esse trabalho, na medida em que os dados apresentados pelos discentes forem agrupados, classificados e relacionados ou inter-relacionados, podem surgir novas interpretações ou mesmo novas questões de pesquisa, as quais não foram anteriormente pensadas, demonstrando a diversidade dessa abordagem metodológica.

Característica 5 – O significado é a preocupação essencial na abordagem qualitativa. Existe uma preocupação com os modos como os indivíduos dão sentido às suas vidas, como experimentam, interpretam e a maneira como eles próprios estruturam o mundo social em que vivem.

No material entregue aos sujeitos, conduzimos para que eles construíssem seu próprio conhecimento, por meio de uma sequência de atividades, deixando o pesquisador na posição de mediador. Além disso, realizaram-se devolutivas aos pesquisados, possibilitando alterações julgadas necessárias para um melhor entendimento, caso necessário. Essas devolutivas ocorreram durante a semana após a realização da oficina de forma individual. Após esse procedimento os dados podem ser analisados.

Os autores Goldenberg (1999), Garnica (2004) e Bogdan e Biklen (1994) reforçam a importância do contato direto com o sujeito da pesquisa, pois é por meio dele que se pode complementar os dados recolhidos. Portanto, nesse sentido, frequentar o ambiente de pesquisa tem sua relevância para que se conheça o contexto em que ela está inserida, o que é o caso presente, no qual o pesquisador está inserido no contexto como professor efetivo da instituição onde se realiza a pesquisa, sendo conhecedor dos sujeitos envolvidos.

4.2 O CONTEXTO DA PESQUISA E OS INVESTIGADOS

A pesquisa foi desenvolvida com 12 acadêmicos do curso de licenciatura em Matemática do IFFar – Campus Alegrete, localizado no município de Alegrete, no estado do Rio Grande do Sul. O referido curso possui atualmente – segundo semestre de 2018 – 72¹ estudantes regularmente matriculados e seu funcionamento se dá no período noturno.

A escolha dessa Instituição se deu em decorrência da atuação de um dos pesquisadores ser professor, além de estar envolvido ministrando disciplinas desde o início do curso, em 2011.

Apesar do pesquisador já conheça os licenciandos do curso, como descrito anteriormente, por ministrar disciplinas, não estará mais atuando somente como professor, mas como professor/pesquisador e seus alunos como sujeitos da pesquisa.

Embora já tenhamos realizado o contato com a direção da Instituição, a qual já sinalizou, verbalmente, autorização para o desenvolvimento da pesquisa, sendo desenvolvida na forma de Projeto de Ensino, também, salientamos, que todos os sujeitos assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE). Esse documento manifesta total e irrestrita concordância do sujeito em participar da pesquisa, voluntariamente, após explicação completa e pormenorizada sobre sua natureza, objetivos, metodologia, coleta de dados, benefícios e riscos que possa acarretar.

4.3 ATIVIDADES PROPOSTAS E INSTRUMENTOS PARA COLETA DE INFORMAÇÕES

As atividades desenvolvidas foram realizadas no turno inverso das aulas dos discentes, à tarde, pois a aplicação não fez parte de nenhuma disciplina em que estivessem matriculados.

¹ Dados fornecidos pela Secretaria de Registros Acadêmicos do IFFar – Campus Alegrete.

O IFFar possui regulamentação própria, por meio da Resolução CONSUP N° 046/2016, de 26 de julho de 2016, a qual regulamenta os Projetos de Pesquisa, Ensino e Extensão e dá outras providências. No Capítulo I, referente aos Projetos de Ensino, fazendo um recorte do artigo 4º, apresentamos alguns objetivos:

- I - Estimular práticas com foco na permanência e no êxito dos Estudantes;
- II – Contribuir para o aprimoramento e a qualidade dos cursos;
- III – Impulsionar o desenvolvimento de atividades de ensino articuladas com a pesquisa e a extensão;
- IV – Estimular práticas que ampliem o universo de vivências dos Estudantes para além daquelas já propostas no projeto pedagógico do curso; [...] (BRASIL, 2016, p. 4).

A pesquisa se desenvolveu fora da sala de aula regular, com conteúdo não constante do Projeto Pedagógico do Curso (PPC) e somente com a participação dos selecionados. Tendo o intuito de complementação de sua formação, elaboramos um Projeto de Ensino, que foi encaminhado e aprovado pela Direção de Ensino da Instituição, órgão responsável pelo registro dessas atividades.

O registro se faz necessário para a certificação dos acadêmicos, os quais poderão, se o desejarem, contar como horas em Atividades Acadêmica-Científico-Culturais (ACC). Essas têm por objetivo contribuir na “formação ampla e diversificada do licenciando, a partir de vivências e experiências realizadas para além do âmbito do curso ou da instituição, valorizando a pluralidade de espaços educacionais e incentivando a busca pelo conhecimento”. (BRASIL, 2014, p. 37).

Pensando nas atividades do Projeto de Ensino, planejamos a realização de oito encontros, um por semana, com duração de duas horas e meia cada, totalizando 20 horas. Em todos os encontros, utilizamos as TD, nesse caso o *GeoGebra*, no Laboratório de Informática da Instituição, o qual dispõe de 25 computadores.

Quando convidamos os alunos e explicamos como decorreria o Projeto de Ensino, eles sugeriram que fossem realizados encontros com duração de cinco

horas, porém explicamos que talvez fosse muito cansativo todo esse tempo. Eles justificaram essa necessidade, pois, o campus se encontra fora da região urbana da cidade e não teriam como retornar às suas casas e voltar à noite para as aulas. Então, acordamos que o primeiro e segundo encontro seriam de duas horas e meia e ao final do segundo encontro faríamos uma avaliação para verificar a possibilidade de fazermos os próximos com duração de cinco horas. Após a finalização do segundo encontro, os participantes solicitaram que os próximos encontros fossem agrupados e tivessem duração de cinco horas.

No Quadro 7, apresentamos as atividades que foram contempladas durante a realização do Projeto de Ensino, o qual dividimos em quatro oficinas.

Quadro 7 – Atividades desenvolvidas durante o Projeto de Ensino

1º encontro	Oficina 1 – Fractal hexagonal de Dürer.
2º encontro	Oficina 1 – Fractal hexagonal de Dürer.
3º encontro	Oficina 2 – Dimensão Fractal.
4º encontro	Oficina 3 – Curva de Peano.
5º encontro	Oficina 4 – Tetraedro de Sierpinsky.

Fonte: elaborado pelos autores.

A Oficina 1 foi dividida em dois encontros e, para mais informações, acesse o Caderno Didático 1 pelo endereço eletrônico: <<http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/702074>>. Teve como objetivos: desenvolver a parte histórica do fractal de Dürer; construir o fractal hexagonal de Dürer utilizando o *GeoGebra*; explorar relações geométricas envolvidas no fractal hexagonal de Dürer; e chegar à elaboração de uma definição de fractal.

O 1º encontro foi dividido em três momentos. No primeiro, aconteceu uma breve explanação aos acadêmicos, sujeitos da pesquisa, sobre o trabalho fazer parte das atividades práticas de uma tese de doutoramento, apresentando os ob-

jetivos, metodologia adotada e como seria realizada a coleta e análise dos dados. Após esse momento, todos aceitaram participar e assinaram o TCLE. Passamos para o segundo momento, que foi a realização de um pré-teste, com o objetivo de verificar as concepções dos participantes sobre fractal. Após essa etapa, partimos para o terceiro momento, que foi a construção do fractal hexagonal de Dürer, no *GeoGebra*.

No 2º encontro, foi realizada a exploração da construção, por meio de observação. Nessa construção foram calculadas as áreas das regiões hexagonais dos níveis 0, 1, 2 e 3 até chegarmos a uma conjectura para o nível n . Após esse momento, foram apresentados outros fractais, como o Conjunto de Cantor ou Poeira de Cantor, Curva de Koch e os Fractais de Sierpinsky. Finalizamos essa etapa com a solicitação aos acadêmicos da escrita de uma definição de fractal, realizada a partir do que havia sido exposto.

Já a Oficina 2 foi realizada em um único encontro por solicitação dos acadêmicos. O material desta oficina se encontra no Caderno Didático 2 no endereço eletrônico: <<http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/600194>>. Tivemos como objetivos: reconhecer fractais a partir de sua estrutura; conhecer a cronologia de fractais e alguns fractais clássicos; apresentar a fórmula da dimensão fractal; e calcular a dimensão de alguns fractais.

Para o 3º encontro, tivemos dois momentos. O primeiro consistiu em demonstrar, algebricamente, o cálculo da dimensão fractal. Já no segundo, calculamos dimensões dos principais fractais, usando a Planilha e Janela *CAS*² do *GeoGebra*.

Para a Oficina 3, foi realizada a exploração do fractal Curva de Peano, sendo que o material encontra-se no Caderno Didático 3 disponível no endereço eletrônico: <<http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/702073>>. Esta teve como objetivos: desenvolver a parte histórica da Curva de Peano; construir a Curva de

² A Janela *CAS* (*Computer Algebra System*) é uma das áreas de trabalho do *GeoGebra*, assim como a Janela de Álgebra, Janela de Visualização e Planilha.

Peano utilizando o *GeoGebra*; e explorar relações geométricos envolvidas na mesma.

No 4º encontro, tivemos também dois momentos. No primeiro foi realizada a construção da Curva de Peano, que é um objeto matemático construído com o auxílio do *GeoGebra*, a partir de um processo recursivo infinito. Em seguida, no segundo momento, realizamos as explorações geométricas: soma do comprimento dos segmentos e área da superfície formada nos níveis 0, 1, 2 e 3 até chegarmos a uma conjectura para o nível n . Ao final dessa exploração, os discentes deveriam chegar à conclusão que a soma do comprimento dos segmentos para um nível n tenderia a infinito e a área da superfície, tenderia a ser a área de uma superfície de um quadrado.

Para finalizar, o último encontro, Oficina 4, foi destinado ao estudo do Tetraedro de Sierpinsky, o qual teve por objetivos: construir o Tetraedro de Sierpinsky utilizando o *GeoGebra*; e explorar relações geométricas envolvidas no Tetraedro de Sierpinsky. Para mais informações acesse na íntegra o Caderno Didático 4 no endereço eletrônico: <<http://educapes.capes.gov.br/handle/capes/597310>>.

Nesse 5º encontro, estudamos algumas propriedades geométricas do fractal denominado de Tetraedro de Sierpinsky, que é um objeto matemático construído a partir de um processo recursivo infinito, com o auxílio da Janela de Visualização e Planilha do *GeoGebra*. Dividimos em duas partes tal construção. A primeira foi destinada à construção do referido fractal, e a segunda envolveu explorações geométricas como a soma das medidas dos comprimento das arestas, somas das áreas e, finalizando, a soma dos volumes nos níveis 0, 1, 2 e 3 até chegar a uma conjectura para o nível n . Ao final dessa exploração, os participantes deveriam concluir que a soma das medidas dos comprimentos das arestas para um nível n tenderia a infinito; enquanto a soma das áreas da superfície tenderia a ser constante; e o soma dos volumes tenderia para zero.

Foi planejado um pós-teste, realizado depois de seis meses do encerramento das atividades, com o intuito de verificar se houve aprendizagem ou entendimento sobre o que é um fractal.

A partir das atividades apresentadas no Quadro 7 e explicitadas anteriormente, elaboramos uma sequência de atividades, as quais possibilitaram a coleta dos dados por meio das produções escritas dos acadêmicos. O envio das construções realizadas no *GeoGebra* foi encaminhado para o e-mail do pesquisador. Cada uma foi salva, em seu computador, para posterior análise. Salientamos que os acadêmicos já possuem conhecimento sobre os comandos do *GeoGebra*. Segundo Gil (2008), essa é umas das técnicas da investigação qualitativa, pois não estamos visando a representação numérica, mas sim no aprofundamento da compreensão do fenômeno analisado. Também se fez uso do diário de campo, o qual se constitui em mais um instrumento para análise das atividades aplicadas. Foi organizado de maneira a conter, sempre que necessário, transcrições de diálogos com os discentes antes, durante ou depois dos encontros. Para melhor organizar e facilitar a análise, foi dividida em duas partes, uma descritiva e outra reflexiva, abrangendo as observações e/ou impressões pessoais do pesquisador a respeito de cada encontro.

Portanto, apoiando a ideia de Bogdan e Biklen (1994) de que pesquisa qualitativa é descritiva, os instrumentos para a obtenção dos dados, que julgamos necessários, serão obtidos a partir de: a) observação direta e anotações do pesquisador em seu diário de campo; b) registros escritos pelos acadêmicos, oriundos da aplicação da sequência de atividades; e c) figuras realizadas no *GeoGebra*.

Para Yin (2005), o emprego de múltiplas fontes de dados, (no nosso caso, produções escritas dos acadêmicos, diário de campo do pesquisador e construções no *GeoGebra*) permite ter um conjunto mais variado para a realização de uma análise fidedigna. O uso desses instrumentos possibilita o cruzamento de informações, se necessário, o que permite, por um lado, garantir os diferentes olhares dos investigados no estudo e, por outro, ao pesquisador obter outras perspectivas do mesmo fenômeno, criando situações para uma melhor análise dos dados.

4.4 PROCEDIMENTOS DE ANÁLISE

Em nossa pesquisa, temos como objetivo investigar possibilidades de inserção de noções de Geometria Fractal no curso de licenciatura em Matemática do IFFar com o uso das TD. Sendo assim, considerando que, no desenvolvimento das atividades propostas, poderão surgir diferentes registros de representação para um determinado objeto matemático, buscamos nos RRS o aporte teórico para guiar nossa pesquisa.

Estruturamos a análise das atividades das oficinas levando em consideração os aspectos matemáticos e os cognitivos, pretendendo verificarmos se o acadêmico compreende não somente o que a representação semiótica apresentada, mas como ela representa o objeto. Dessa forma, podemos conjecturar sobre a compreensão da Matemática e do problema no desenvolvimento das atividades que envolvem noções de Geometria Fractal.

Para Bogdan e Biklen (1994), a análise dos dados pode ser caracterizada como um processo de busca e de organização de materiais. Nessa perspectiva, a (metodologia de) análise das atividades propostas ocorreu a partir dos três instrumentos de coleta: diário de campo, registros escritos dos alunos e construções no *GeoGebra*.

A análise envolve o trabalho com os dados, a sua organização, divisão em unidades manipuláveis, síntese, procura de padrões, descoberta dos aspectos importantes e do que deve ser aprendido e a decisão sobre o que vai ser transmitido aos outros. Em última análise, os produtos finais da investigação constam de livros, artigos, comunicações e planos de ação. A análise de dados leva-o das páginas de descrições vagas até estes produtos finais. (BOGDAN; BIKLEN, 1994, p. 205).

Pensando por esse viés, apoiamo-nos no método qualitativo quando buscamos analisar os procedimentos de resolução dos alunos em relação aos diferentes tipos de transformações (tratamento ou conversões) das representações semióticas. Lembrando que, segundo Bogdan e Biklen (1994, p. 11), a pesquisa qualita-

tiva é aquela “[...] que enfatiza a descrição, a indução, a teoria fundamentada e o estudo das percepções pessoais”.

Nem sempre o processo de aprendizagem pode ser facilmente quantificado. Como mencionado anteriormente, essa é uma pesquisa qualitativa de cunho interpretativo que envolve a observação, registros escritos e construções realizadas no *GeoGebra* pelos acadêmicos, além de seus relatos registrados no diário de campo. Para Fiorentini e Lorenzato (2009), é no diário de campo “[...] que o pesquisador registra observações de fenômenos, faz descrições de pessoas e cenários, descreve episódios ou retrata diálogos”. (p.118).

Para a realização da análise dos dados coletados nas oficinas, categorizamos as respostas dos acadêmicos nos seguintes aspectos: resposta correta; resposta parcialmente correta, quando faltou alguma informação para ser considerada correta; resposta errada.

Segundo Moraes e Galiazzi (2011, p. 22), “[...] a categorização é um processo de comparação constante entre as unidades definidas no momento inicial de análise levando a agrupamentos de elementos semelhantes. Conjunto de elementos de significação próximos constituem categorias.”

Portanto, obtidos os dados a partir da aplicação das atividades propostas e manipulados (categorizados), o passo seguinte foi a análise e interpretação deles, ambas se constituindo a parte principal de nossa pesquisa. Posteriormente, verificamos se o problema da pesquisa foi respondido e se seus objetivos foram alcançados.

CAPÍTULO 5

CONHECIMENTOS PRODUZIDOS: INTERLOCUÇÃO DO REFERENCIAL TEÓRICO COM OS DADOS EMPÍRICOS

Neste capítulo, apresentamos a análise e a discussão dos resultados da pesquisa, realizando a interlocução do referencial teórico (RRS) com os dados empíricos, desde o pré-teste, passando pelas oficinas 1, 2, 3 e 4 e finalizando com o pós-teste. Antes de iniciarmos a fase de aplicação das atividades, como a pesquisa envolve seres humanos, foi realizado o cadastro junto à Plataforma Brasil¹, para que o Comitê de Ética em Pesquisa da Universidade Franciscana autorizasse a realização do estudo, uma vez tratar-se de um doutorado na instituição.

Após essa aprovação realizamos uma sondagem de interesse e pré-inscrição junto aos acadêmicos do 3º, 5º e 7º semestres do curso de licenciatura em Matemática do IFFar – Campus Alegrete. Como a proposta inicial do Projeto de Ensino previa no máximo 25 discentes, ficamos com 23 participantes pré-inscritos. A escolha desse número deve-se à infraestrutura dos Laboratórios de Informática da Instituição, os quais possuem 25 computadores.

As atividades foram realizadas entre os meses de abril e maio de 2019, iniciando na primeira semana de abril, com 16 acadêmicos confirmando sua inscrição, tendo concluído o curso na primeira semana de maio, com 12 deles. Para análise dos resultados, consideramos os acadêmicos que tiveram certificação no Projeto de Ensino, ou seja, aqueles que obtiveram frequência igual ou superior a 75%. Para garantir o anonimato, os 12 discentes serão identificados pelas letras A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K e L.

Salientamos que, para facilitar a comunicação professor/pesquisador e acadêmicos, criamos um grupo no *WhatsApp*² denominado Geometria Fractal, o qual foi utilizado como meio de comunicação direta com os acadêmicos.

1 A Plataforma Brasil é um sistema eletrônico criado pelo Governo Federal para sistematizar o recebimento dos projetos de pesquisa que envolvam seres humanos nos Comitês de Ética em todo o país.

2 *WhatsApp* é um aplicativo multiplataforma de mensagens instantâneas e chamadas de voz para *smartphones*.

Todas as oficinas desenvolvidas no Projeto de Ensino foram pensadas levando em consideração os pontos de vista matemático e cognitivo, apontados por Duval (2012). A análise do ponto de vista matemático, que envolve a compreensão dos objetos matemáticos, foi verificada mediante as repostas apresentadas pelos acadêmicos. Em relação ao ponto de vista cognitivo, tivemos o cuidado de planejar a mobilização de mais de um tipo de RRS, conversões entre elas e sua coordenação. Mediante as respostas apresentadas, verificamos se houve ou não a aprendizagem dos conceitos envolvidos.

5.1 PRÉ-TESTE: VERIFICANDO OS CONHECIMENTOS PRÉVIOS

Iniciamos as atividades do Projeto de Ensino explicando que fazem parte do trabalho de doutorado do professor/pesquisador. Estavam presentes nessa atividade todos os 12 investigados dos 16 que confirmaram a inscrição.

Após essa parte inicial, aplicamos um pré-teste com o objetivo de verificar quais concepções os estudantes teriam sobre a temática fractal e, a partir disso, analisar os RRS (RLN e RF) apresentados. Para tanto, foram realizados dois questionamentos:

- Para você o que é um fractal?
- Caso você tenha uma concepção de fractal, esboce um desenho de um fractal.

Para essa atividade, não esperávamos nenhuma definição formal de fractal, mas sim verificar se já haviam ouvido falar. Acreditávamos que os acadêmicos, antes de iniciar o curso, buscariam informações sobre a temática que seria abordada. Em conversa com a turma, eles disseram que não pesquisaram, esperavam que o professor/pesquisador desenvolvesse a temática e, por esse motivo, não tivemos uma conceituação e desenho de fractal de todos os pesquisados.

Analisando as respostas obtidas, tivemos 7 participantes (A, D, E, F, I, J e L) que responderam não saber o que seria um fractal e, conseqüentemente, não esboçaram o desenho.

Já os demais participantes, aproximadamente 42%, apresentaram uma definição sobre o que seria um fractal e apenas o participante H relatou não saber desenhar um fractal. Dentre as respostas apresentadas, temos:

É uma figura geométrica que, quando ampliada, volta a manifestar a figura inicial. (Acadêmico B).

Fractal é uma figura geométrica proporcional, que ocorre a repetição de uma parte (principal) em várias escalas. (Acadêmico C).

Uma figura geométrica com repetições de uma forma original cada vez menores ou maiores, de forma infinita. (Acadêmico G).

Repetições de uma mesma imagem. (Acadêmico H).

É uma parte ou todo de mesmo objeto, sobrepostos formando um objeto maior. (Acadêmico K).

Conforme apresentado nos registros dos cinco acadêmicos, existe uma ideia informal sobre fractal, não chegando a uma definição formal como a apresentada por Feder (1988), Falconer (2003), Gouvea e Murari (2004) e Barbosa (2005), porém muito próxima a apresentada por Stewart (1996), ao definir fractais como formas geométricas nas quais existe uma reprodução de sua estrutura original em proporções menores.

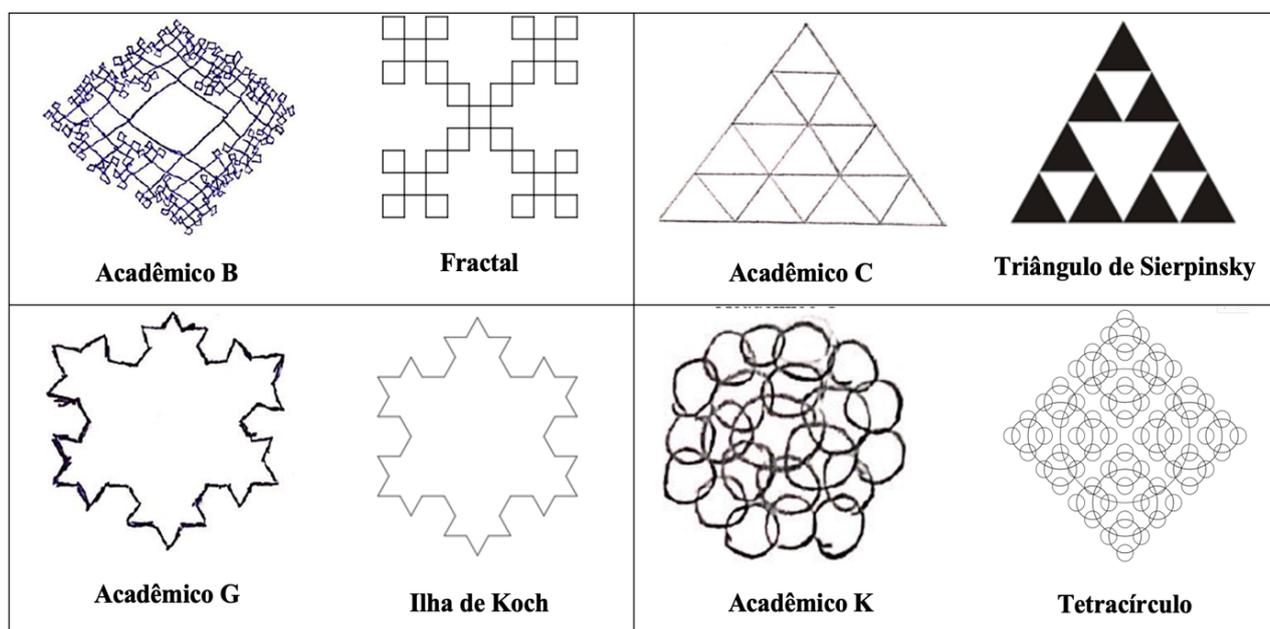
Para a segunda parte, conforme dito anteriormente, foi solicitado um esboço de algum fractal que eles conhecessem (Figura 22). Com exceção do Acadêmico H, os demais o apresentaram. Acreditamos ser importante fazer essa ligação entre o conceito e a figura, pois, segundo Arcavi (2003), a visualização é um ponto central na aprendizagem e no fazer matemático. Ainda, segundo o autor, a visualização

[...] é a habilidade, o processo e o produto de criação, interpretação, uso e comentário sobre figuras, imagens, diagramas, em nossas mentes, em papel

ou com ferramentas tecnológicas, com a finalidade de desenhar e comunicar informações, pensar sobre e desenvolver ideias não conhecidas e avançar na compreensão. (ARCAVI, 2003, p. 217, tradução nossa).

Para Dreyfus (1990, p. 119), a “visualização do ponto de vista da educação matemática inclui duas direções: a interpretação e compreensão de modelos visuais e a capacidade de traduzir em informação de imagens visuais o que é dado de forma simbólica”. Exatamente por essa ideia de melhorar e colaborar com a aprendizagem de conceitos matemáticos é que optamos em solicitar o esboço gráfico.

Figura 22 – Esboço de Fractal representado pelos Acadêmicos B, C, G e K



Fonte: acervo dos autores.

Na Figura 22 tomamos o cuidado de apresentar o desenho do acadêmico (imagem da esquerda) e a respectiva representação do pesquisador (imagem da direita). Observamos que o Acadêmico B tentou criar um fractal em que houvesse repetições por iterações. O Acadêmico C tentou criar um Fractal de Sierpinsky, o que não ocorreu de forma correta. O Acadêmico G fez a representação correta da Ilha de Koch ou Floco de Neve e, por fim, o Acadêmico K tentou fazer um esboço por meio de sobreposições, o que não ficou claro como uma figura fractal.

Portanto, apenas o Acadêmico G realizou de forma correta a representação de uma figura fractal.

De acordo com Duval (2009), a aprendizagem e a compreensão dos objetos matemáticos só existirão quando formos capazes de os representar pelo menos de dois modos diferentes, transformando-os entre si, o que nos leva a analisar o efeito na aprendizagem de situações de ensino que valorizem a transformação de representações. Em nosso caso, já iniciamos os RRS, pois, no primeiro questionamento, os alunos deveriam fazer um RLN, por meio da conceituação de fractal. No entanto, apenas cinco acadêmicos o fizeram. Já no segundo questionamento, com a solicitação do esboço de um fractal, os discentes estariam realizando um RF, sendo que apenas quatro deles conseguiram fazer esse registro, partindo do RLN. Salientamos que esse foi o primeiro contato que o grupo de acadêmicos teve com a temática, que seria posteriormente desenvolvida nas oficinas.

Dessa forma, concluímos que apenas o Acadêmico G apresentou uma noção correta, por meio de um RLN e um RF do fractal. Porém, isso não impediu a realização das oficinas, pois os demais participantes estavam ali para aprenderem sobre fractais.

5.2 OFICINA 1: FRACTAL HEXAGONAL DE DÜRER

A Oficina 1, como mencionada anteriormente, foi realizada em duas partes, a primeira partindo da construção do fractal hexagonal de Dürer (Atividades 1 e 2) e a segunda, com a exploração de conceitos geométricos do referido fractal e a apresentação de outros fractais (Atividades 3 e 4). Nessa etapa, todos os acadêmicos investigados (12) estiveram presentes.

Iniciamos a oficina, após o pré-teste, perguntando o que eles entendiam por fractal e a partir desse momento começamos a falar sobre a história e o conceito do fractal de Dürer (Atividade 1), porém sem apresentar a figura do fractal.

Após esse momento, a partir do conceito apresentado para o fractal hexagonal de Dürer, solicitamos que eles imaginassem como seria esse tal fractal.

Nessa etapa, apresentamos um RLN e verificamos se eles conseguiam fazer uma conversão para o RF, ou seja, realizar um esboço do referido fractal conforme apresentado no Quadro 8.

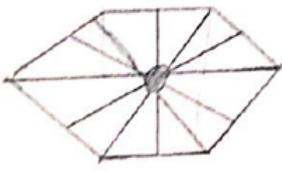
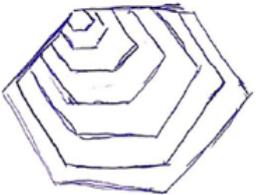
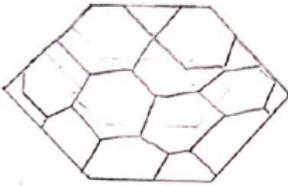
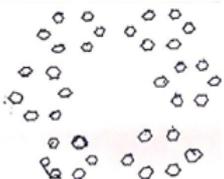
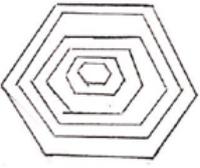
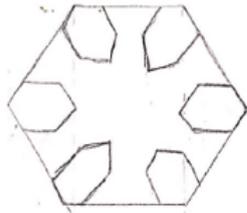
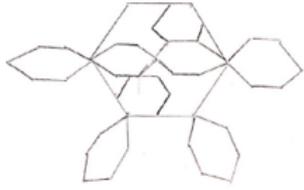
Quadro 8 – Conversão do RLN para RF no fractal hexagonal de Dürer

RLN	RF
<p>É um fractal construído a partir de um hexágono regular, em que a cada iteração (ou repetição de procedimentos) ocorre a substituição de cada vértice do polígono original por um hexágono regular com a mesmo número de lados, de forma que um de seus ângulos coincida com o ângulo do hexágono regular inicial, tendo a condição de que os hexágonos regulares gerados tenham um vértice em comum.</p>	

Fonte: elaborado pelos autores.

Solicitamos que os acadêmicos fizessem um esboço até a primeira iteração (nível 1) do fractal hexagonal de Dürer com o objetivo de estimular a visualização e a imaginação. Segundo Jones (2001), a visualização pode ter alguns ganhos físicos ou mentais, por exemplo, ao mesmo tempo que a imaginação é capaz de ser algo pictórico e acabar tendo relações com percepção, com memorização e com a natureza de imagens dinâmicas, além de interação com a formação de conceitos. Pelas respostas apresentadas, concluímos que eles não entenderam como seria esse fractal, logo não conseguiram realizar a conversão da RLN para a RF. No Quadro 9, apresentamos os esboços feitos pelos alunos.

Quadro 9 – Esboços apresentados para o fractal hexagonal de Dürer

Acadêmico A 	Acadêmico B 	Acadêmico C 	Acadêmico D 
Acadêmico E 	Acadêmico F 	Acadêmico G 	Acadêmico H 
Acadêmico I 	Acadêmico J 	Acadêmico K 	Acadêmico L 

Fonte: acervo dos autores.

Depois de os participantes esboçarem o desenho, apresentamos-lhes a imagem do fractal hexagonal de Dürer. Conforme observado no Quadro 9, nenhum discente realizou o esboço da forma correta. Os Acadêmicos A, B, C, E, G, H I, J e K perceberam que, para realizar a construção do referido fractal, deveriam colocar hexágonos regulares no interior da figura, porém não souberam como fazer de forma correta. O Acadêmico D tentou esboçar o nível 0, entretanto não fez a representação com um hexágono regular. O Acadêmico F não soube realizar um RF de forma correta. Já o Acadêmico L fez a construção errada, pois utilizou um pentágono.

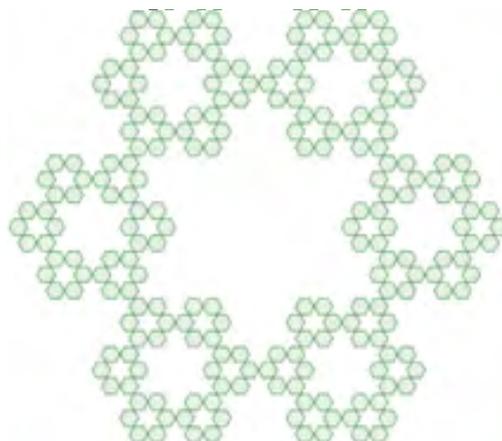
Em conversa com os estudantes, depois que viram o desenho do fractal, eles relataram que era um desenho muito simples, porém nenhum professor até aquele momento havia desenvolvido essa dinâmica de utilizar a imaginação e a visualização. Isso nos mostrou ser importante instigar e incentivar o desenvolvimento nos alunos na conceituação a partir da imaginação e da visualização.

Após esse momento, iniciamos a construção, no *GeoGebra*, do fractal hexagonal de Dürer (Atividade 2). Segundo Kenski (2012, p. 44), “a presença de uma determinada tecnologia pode induzir profundas mudanças na maneira de organizar o ensino”. Pensando por esse viés, estamos associando o uso do computador e do *GeoGebra* como um recurso metodológico, pois, a partir da imagem e movimentos que podem ser feitos na construção, por exemplo, oferecemos informações mais realistas em relação ao que está sendo estudado e ensinado.

Todos os presentes têm conhecimento sobre o *software*, porém, em conversa anterior ao início do curso, eles disseram não se lembrarem de todos os comandos. Por isso resolvemos fazer a construção do fractal hexagonal de Dürer realizando um passo a passo, o que foi uma excelente estratégia, pois, durante a execução, os acadêmicos iam questionando e relembrando os comandos.

Construímos o nível 0 e o nível 1 juntos e proporcionamos um tempo para pensarem como poderiam fazer para construir o nível 2. Oito alunos conseguiram realizar a construção desse nível, pois é um processo iterativo que passa a se repetir. Depois desse tempo, realizamos a construção do nível 2, sendo sanadas as dúvidas de quem não havia conseguido realizar a construção. As dificuldades foram em relação à digitação correta dos comandos no *GeoGebra*, alguns estavam fazendo de forma errada. Entretanto, faltava ainda o nível 3. Quando pedimos a eles para tentarem fazer isso, prontamente o fizeram. Todos os 12 acadêmicos conseguiram finalizar a construção sem nosso auxílio (Figura 23).

Figura 23 – Fractal hexagonal de Dürer (nível 3) construído pelo Acadêmico I



Fonte: acervo dos autores.

Ao final da oficina, todos os alunos conseguiram construir o seu fractal hexagonal de Dürer. Então, pedimos para salvarem nos seus e-mails a construção e que mandassem por e-mail ao professor/pesquisador, pois na aula seguinte iríamos explorar os entes geométricos envolvidos nesse fractal.

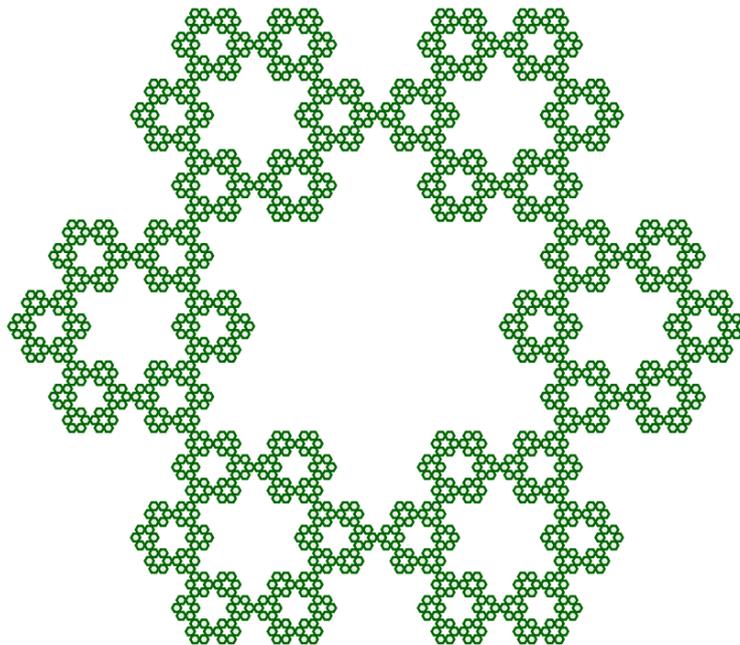
Acreditamos que a prática docente precisa ser pensada com novas abordagens e formas de ensino que culminem na aprendizagem do acadêmico. Ele precisa ir além da memorização de conceitos e regras e, pensando por esse viés, o RF do fractal hexagonal de Dürer, por meio do *GeoGebra*, proporciona vantagem didática, ou seja, a visualização e o manuseio do que está sendo trabalhado oportuniza um aspecto fundamental na Matemática, que é despertar a motivação, o buscar o conhecimento e o aprender. Dessa forma, as aulas tornam-se mais dinâmicas, participativas e produtivas.

Ao final da aula, eles relataram que gostaram muito dessa primeira parte da oficina e que estavam ansiosos para sua continuação na próxima semana.

À noite teria aula com alguns dos acadêmicos participantes do Projeto de Ensino. O Acadêmico L se sentiu desafiado e ficou no seu computador pessoal fazendo o nível 4 do fractal hexagonal de Dürer antes do início da aula. Durante a

aula, ele avisou que havia mandado por e-mail a construção do nível 4 do fractal hexagonal de Dürer, conforme apresentado na Figura 24.

Figura 24 – Fractal hexagonal de Dürer (nível 4) construído pelo Acadêmico L



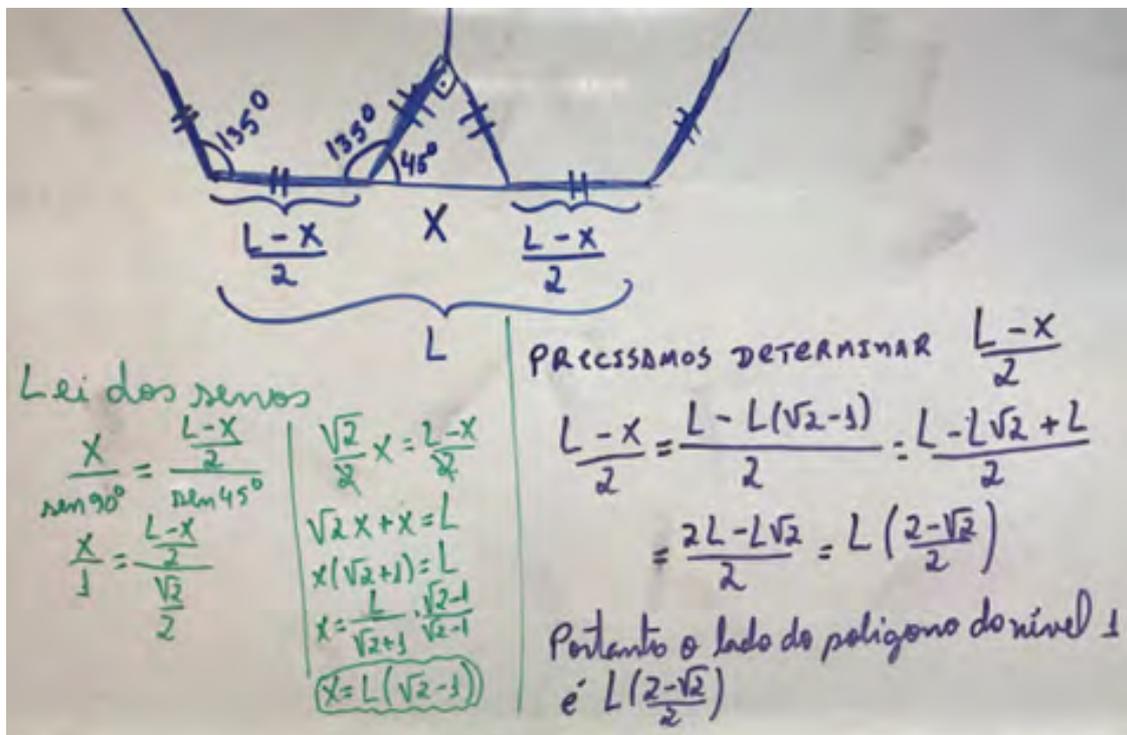
Fonte: acervo dos autores.

Após o término dessa etapa, o professor/pesquisador analisou o arquivo e percebeu que realmente o aluno havia construído mais uma iteração de forma correta. Percebemos que conseguimos estimular os acadêmicos a realizarem as construções propostas e, nesse caso, em especial, esse acadêmico foi além do solicitado na oficina. Sua construção seguiu os passos desenvolvidos durante a primeira parte da Oficina 1.

Alguns minutos antes de iniciarmos a parte 2 da Oficina 1, na semana seguinte, o Acadêmico L questionou como seria a construção do fractal octogonal de Dürer, pois havia tentado fazer sua construção e chegou até o nível 2, porém não a havia salvado em seu computador. Ele estava em dúvida sobre a medida que deveria usar para o segmento no nível 1. Perguntamos como ele havia feito esse cálculo. O discente explicou que o havia feito usando a Lei dos Senos.

Pedimos que viesse ao quadro e explicasse o que fizera. Depois de alguns cálculos, chegou ao valor do segmento para o nível 1, conforme Figura 25.

Figura 25 – Cálculo da medida do segmento do Fractal octogonal de Dürer (nível 1)



Fonte: acervo dos autores.

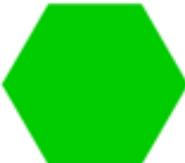
Após esse cálculo, questionamos: qual é a medida do segmento para os níveis 2 e 3? Novamente, respondeu que teria de pensar. Então, perguntamos se ele não havia feito no *GeoGebra* essa construção. Respondeu que sim, mas foi por tentativa e erro para acertar o tamanho do segmento. Porém, no dia anterior, ele pensara em fazer os cálculos para determinar a medida do segmento pela Lei dos Senos. Conversamos com o cursista sobre tais construções e como não as havia salvo, o desafiamos, ficando ele de fazer uma nova e enviar. Consideramos importante incentivar e motivar os acadêmicos a irem além do que é exposto em sala de aula, em especial o Acadêmico L, que demonstrou interesse.

Percebemos que conseguimos motivar os acadêmicos, pois estavam ansiosos para o início da parte 2 da Oficina 1. Todos os investigados estavam presentes nessa segunda etapa.

Dando continuidade, explicamos como seria a dinâmica dessa segunda etapa, que estava dividida em duas partes, a primeira seria a exploração dos entes geométricos do fractal hexagonal de Dürer (Atividade 3) e a segunda parte era para que os participantes conhecessem outros tipos de fractais (Atividade 4).

Sendo assim, retomamos a construção realizada na aula anterior, fractal hexagonal de Dürer, e iniciamos com questionamentos referentes às áreas das regiões hexagonais (Atividade 3), pensando nos registros mobilizados, conforme apresentado no Quadro 10.

Quadro 10 – Questionamentos referentes às áreas das regiões hexagonais do Fractal Hexagonal Dürer para os níveis 0, 1, 2 e 3

Registro de Partida		Registro de chegada
RLN	RF	RS
a) Qual é o valor da área da região hexagonal obtida no nível 0 (A_0)? Explique como você obteve essa área.		$A_0 = \frac{6(L)^2\sqrt{3}}{4}$
b) Qual é o valor de cada uma das áreas das regiões hexagonais obtidas no nível 1 (A_1)? E o valor total, obtido em função de A_0 ?		$A_1 = \frac{2}{3}A_0$
c) Qual é o valor de cada uma das áreas das regiões hexagonais obtidas no nível 2 (A_2)? E o valor total, obtido em função de A_0 ?		$A_2 = \frac{4}{9}A_0$
d) Qual é o valor de cada uma das áreas das regiões hexagonais obtidas no nível 3 (A_3)? E o valor total, obtido em função de A_0 ?		$A_3 = \frac{8}{27}A_0$

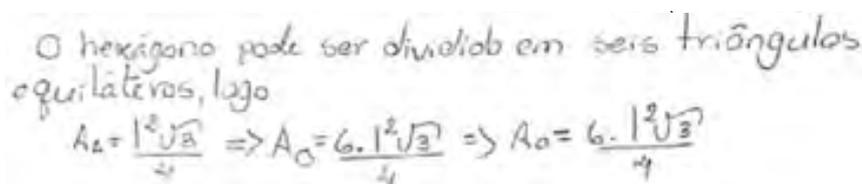
Fonte: elaborado pelos autores.

Para Duval (2009), devemos ser capazes de mobilizar pelo menos dois modos diferentes de representação de um objeto para haver compreensão. Mobilizamos o registro de partida, a conversão dos RLN e RF, tendo como registro de chegada a RS.

No início, os acadêmicos tiveram um pouco de dificuldade nas manipulações algébricas, pois foi solicitado que as áreas das regiões, a partir do nível 1, fossem dadas em função da área inicial, porém, com uma breve explicação, eles entenderam como deveria ser realizado o RS.

Para o valor da região (área) no nível 0, 11 participantes tiveram o cuidado de explicar que o valor da região hexagonal pode ser calculado pela divisão dessa área em seis triângulos equiláteros, conforme apresentado pelo Acadêmico H (Figura 26).

Figura 26 – Resposta do Acadêmico H para a área da região do fractal hexagonal de Dürer (nível 0)



O hexágono pode ser dividido em seis triângulos equiláteros, logo

$$A_0 = \frac{1^2 \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_0 = \frac{6 \cdot 1^2 \sqrt{3}}{4} \Rightarrow A_0 = \frac{6 \cdot 1^2 \sqrt{3}}{4}$$

Fonte: acervo dos autores.

Observamos que o acadêmico utilizou um registro intermediário, RLN, no intuito de explicar como chegaria à resposta e, conseqüentemente, ao RS.

Já para o segundo questionamento, valor da região da área no nível 1, apesar da dificuldade em manipulações algébricas, todos conseguiram chegar à resposta correta, conforme é apresentada pelo Acadêmico C na Figura 27.

Figura 27 – Resposta do Acadêmico C para a área da região do fractal hexagonal de Dürer (nível 1)

$$A = \frac{6 \cdot \left(\frac{l}{3}\right)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{6 \cdot \frac{l^2}{9} \sqrt{3}}{4} = \frac{6 l^2 \sqrt{3}}{9 \cdot 4}$$

São 6, então $A_1 = \frac{6 \cdot 6 l^2 \sqrt{3}}{9 \cdot 4} \Rightarrow A_{1 \text{ TOTAL}} = \frac{6}{9} \cdot \frac{6 l^2 \sqrt{3}}{4}$

Então, $A_{1 \text{ TOTAL}} = \frac{2}{3} \cdot A_0$

Fonte: acervo dos autores.

Para os próximos dois questionamentos, não houve dificuldades e todos novamente chegaram à resposta correta, como observado na Figura 28, reposta do Acadêmico A e do Acadêmico I.

Figura 28 – Resposta para a área da região do fractal hexagonal de Dürer, níveis 2 e 3, dos Acadêmicos A e I, respectivamente

Acadêmico A	Acadêmico I
$A_0 = \frac{6 l^2 \sqrt{3}}{4}$ $A_2 = \frac{36 \cdot 6 \left(\frac{l}{3}\right)^2 \sqrt{3}}{4}$ $A_2 = \frac{36 \cdot 6 \cdot l^2 \sqrt{3}}{81 \cdot 4}$	$A = \frac{6 \left(\frac{l}{3}\right)^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{6 \cdot \frac{l^2}{9} \sqrt{3}}{4} = \frac{6 \cdot l^2 \sqrt{3}}{9 \cdot 4}$ $A_3 = \frac{216 \cdot 6 l^2 \sqrt{3}}{729 \cdot 4} = \frac{24}{81} \cdot \frac{6 l^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{8}{27} \cdot \frac{6 l^2 \sqrt{3}}{4} \rightarrow A_0$ $A_3 = \frac{8}{27} \cdot A_0$
$A_2 = 36, A_0$ $= 81$ $A_2 = \frac{4}{9} \cdot A_0$	

Fonte: acervo dos autores.

No penúltimo questionamento, não houve dificuldades e todos acertaram a resposta. A quinta questão teve como registros de partida o RLN e o RS. Logo, estamos mobilizando dois tipos de registro e, conseqüentemente, realizando conversões entre eles. Como registro de chegada (RS) tivemos a generalização da região de uma área hexagonal para um nível n , conforme apresentado no Quadro 11.

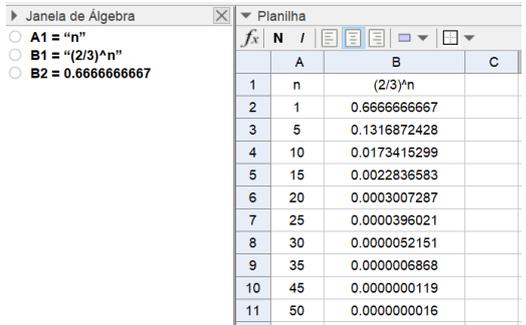
Quadro 11 – Registros mobilizados para o quinto questionamento da Atividade 3

Registro de Partida							Registro de chegada
RLN	RS						RS
e) A partir das observações, cálculos e explicações feitas nos itens anteriores, preencha o quadro determinando medida do lado, número de hexágonos e a área (em relação a A_0) para um fractal hexagonal de Dürer de nível n . Salientamos que n é um número natural genérico.		Nível 0	Nível 1	Nível 2	Nível 3	...	Nível n
	Lado	1	$\frac{l}{3}$	$\frac{l}{9}$	$\frac{l}{27}$...	$\frac{l}{3^n}$
	Número de hexágonos	1	6	36	216	...	6^n
	Área total em relação a A_0	A_0	$\frac{2}{3}A_0$	$\frac{4}{9}A_0$	$\frac{8}{27}A_0$...	$\frac{2^n}{3^n}A_0$ ou $\left(\frac{2}{3}\right)^n A_0$

Fonte: elaborado pelos autores.

No sexto e último questionamento da Atividade 3, todos chegaram à resposta correta. No Quadro 12, apresentamos os registros mobilizados e a resposta que esperávamos.

Quadro 12 – Registros mobilizados para o sexto questionamento da Atividade 3

RLN	RS	RLN ou RS
f) Se pensarmos em um valor de n muito elevado, ou seja, n tender a infinito, o que ocorrerá com a área A_n ?	 <p>ou</p> <p>ou $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n$</p>	<p>A partir da análise da figura, observamos que, quanto maior for o valor de n, menor será o valor da área. Portanto, para um n tendendo a infinito, a área A_n tende a zero.</p> <p>ou</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{2}{3} \right)^n A_0 \right) = 0$

Fonte: elaborado pelos autores.

Nessa questão, os participantes ficaram divididos, sendo que 50% resolveram utilizando a planilha do *GeoGebra*, apresentando uma RLN, e a outra metade utilizando o conceito de limite, mostrando uma RS, como observado na Figura 29, reposta do Acadêmico H e do Acadêmico J.

Figura 29 – Resposta para a sexta questão da Atividade 3 dos Acadêmicos H e J

Acadêmico H

Se usarmos o limite da área com n tendendo ao infinito, isso resultará em zero.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n A_0 = A_0 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n = 0.$$

Acadêmico J

Baseado na fração usada $A_n = \left(\frac{2}{3} \right)^n A_0$ depois de chegarmos ao termo genérico da área, com o uso do *geogebra* comprovamos que o limite a cada interação fica mais próximo de 0 ou seja, tende a zero. #

Fonte: acervo dos autores.

Consideramos ser importante o uso da planilha no *GeoGebra*, pois ela pode proporcionar um ambiente para investigações. Nesse caso, os acadêmicos averiguaram o que acontece para um valor elevado de n , além de realizar explorações de forma rápida e dinâmica.

Após o término da Atividade 3, percebemos que houve a mobilização de pelo menos dois tipos diferentes de registros de partida o que, segundo Duval (2009), leva à compreensão dos objetos matemáticos mobilizados. Pelas repostas apresentadas, identificamos que houve conversão entre os RRS e a compreensão dos objetos matemáticos envolvidos na Atividade 3.

Para finalizarmos a Oficina 1, iniciamos a última atividade, a qual previa a apresentação de outros fractais, além do trabalhado até o momento, com o intuito de os participantes elaborarem uma definição de fractal. Foram mostrados os fractais: Conjunto de Cantor ou Poeira de Cantor; Curva de Koch; e os Fractais de Sierpinsky. Para ambos os fractais, foi realizado um questionamento e, a fim de auxiliar a resposta, foi solicitado o preenchimento de um quadro no qual os participantes analisariam alguns itens relacionados a sua construção a partir do nível 0 até chegar a uma generalização no nível n .

Os Acadêmicos se mostraram interessados questionando, por exemplo, aspectos de como seria o valor da área para um nível n do Fractal do Sierpinsky, bem como a medida do comprimento do segmento da Curva de Koch.

Nos três primeiros questionamentos, tivemos os registros de partida RLN e RS e o registro de chegada sendo o RS. A primeira pergunta foi relacionada ao Conjunto de Cantor, em que sete acadêmicos apresentaram como respostas o RLN, enquanto os RS foram trazidos pelos outros cinco que o fizeram por meio da notação de limite. A Figura 30 ilustra a resposta apresentada pelo Acadêmico G.

Figura 30 – Resposta ao primeiro questionamento da Atividade 4 apresentada pelo Acadêmico G

a) A partir da observação da figura do Conjunto de Cantor, preencha o Quadro 2 e responda: se o número n de iterações (n é um número natural qualquer) for um número muito grande o que acontece com a medida do comprimento do segmento resultante? Argumente sua resposta.

Quadro 2 – Medida do comprimento de cada segmento e número de intervalos fechados na Poeira de Cantor por níveis.

	Nível 0	Nível 1	Nível 2	Nível 3	...	Nível n
Comprimento de cada segmento	L	$L/3$	$L/9$	$L/27$...	$L/3^n$
Número de intervalos fechados	1	2	4	8	...	2^n

sendo a medida do segmento igual a $\frac{L}{3^n}$, pelo limite:
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L}{3^n} = L \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = L \cdot 0 = 0$
 vemos que para um n muito grande, a medida do segmento tenderá a zero.

Fonte: acervo dos autores.

Percebemos que os acadêmicos já haviam realizado, na Atividade 3, algo semelhante. Então, não demonstrando dificuldade em preencher os quadros dos 3 primeiros questionamentos, todos concluíram corretamente.

O segundo fractal apresentado foi a Curva de Koch, porém, apenas dois alunos apresentaram a resposta por meio do RLN. Os demais (10) mostraram o RS por meio da notação de limite, conforme apresentado na Figura 31 pelo Acadêmico B.

Figura 31 – Resposta ao segundo questionamento da Atividade 4 apresentada pelo Acadêmico B

b) A partir da observação da figura da Curva de Koch, preencha a Quadro 3 e responda: se o número n de iterações (n é um número natural) for um número muito grande qual vai ser o comprimento da curva naquele nível? Justifique sua resposta.

Quadro 3 – Comprimento de cada segmento e número de segmentos de retas na Curva de Koch.

	Nível 0	Nível 1	Nível 2	Nível 3	...	Nível n
Comprimento de cada segmento	L	$\frac{L}{3}$	$\frac{L}{9}$	$\frac{L}{27}$...	$\frac{L}{3^m}$
Número de segmentos de retas	1	4	16	64	...	4^m

comprimento da curva = $4^m \cdot \frac{L}{3^m}$
 $C = \left(\frac{4}{3}\right)^m L$
 $\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^m L = L \lim_{m \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{3}\right)^m = +\infty$

Fonte: acervo dos autores.

Para finalizar a apresentação de alguns fractais, trabalhamos com o Triângulo de Sierpinsky. Sete acadêmicos apresentaram como respostas o RS e os demais, cinco, o RLN, por meio da notação de limite. Percebemos uma preferência da maioria dos participantes, a partir do segundo questionamento, em utilizar um RS, e acreditamos que isso seja devido aos discentes utilizarem muito esse tipo de representação nas aulas da disciplina de Cálculo. Vejamos a resposta apresentada pelo Acadêmico J na Figura 32.

Figura 32 – Resposta ao terceiro questionamento da Atividade 4 apresentada pelo Acadêmico J

c) A partir da observação da figura do Triângulo de Sierpinsky, preencha o Quadro 4 e responda: se o número n de iterações (n é um número natural) for um número muito grande qual vai ser o valor da área da região triangular nesse nível n ? Justifique sua resposta.

Quadro 4 – Comprimento do lado do triângulo, número de triângulos gerados e área em relação a área inicial (A_0) para o fractal de Sierpinsky de n iterações.

	Nível 0	Nível 1	Nível 2	Nível 3	...	Nível n
Comprimento do lado do triângulo	1	$1/2$	$1/4$	$1/8$...	$1/2^n$
Número de triângulos gerados	1	3	9	27	...	3^n
Área em relação a A_0	$1 \cdot \sqrt{3}/4$	$3/4 A_0$	$9/16 A_0$	$27/64 A_0$...	$(3/4)^n A_0$

Quanto maior for o n , menor a área da região triangular será, ou seja quanto maior for n a região tende a zero. #

Fonte: acervo dos autores.

É importante salientar que a intenção de realizar essa exploração foi a de investigar o pensamento algébrico, não deixando essa atividade somente teórica, e sim tentar despertar a curiosidade e o interesse dos participantes. Analisando os RRS apresentados pelos acadêmicos, nos três primeiros questionamentos, concluímos que houve a conversão entre os registros e, conseqüentemente, ocorreu a aprendizagem.

Segundo Ponte, Branco e Matos (2009), existem três direções fundamentais do pensamento algébrico que são: representar, raciocinar e resolver problemas. Nesse sentido, o representar diz respeito à aptidão do estudante em empre-

gar diferentes sistemas de representação, o que se encaixa com os RRS de Duval (2009). Já o raciocinar, conforme Ponte, Branco e Matos (2009), é a capacidade de relacionar, analisando propriedades dos objetos matemáticos e, ainda, a capacidade de generalizar, que acontece ao estabelecer relações válidas para uma determinada classe de objetos. Por fim, para resolver problemas que incluem modelar situações, bem como usar diversas representações, novamente foram utilizados os RRS.

Para finalizarmos essa oficina, solicitamos aos discentes que elaborassem um conceito de fractal. Podemos concluir que, mesmo aqueles que não tinham ideia do que era um fractal no pré-teste, esboçaram um conceito. Dividimos em três categorias os registros: correto para os que esboçaram uma definição no pré-teste, correto para aqueles que não tinham uma formalização de definição no pré-teste e, por fim, parcialmente correto para aqueles que não se encaixam nas duas categorias anteriores, e não estavam errados. Iniciamos apresentando as definições corretas dos cinco acadêmicos que elaboraram uma definição preliminar no pré-teste.

É o resultado de infinitas iterações sobre uma figura geométrica, cujas iterações seguem um padrão. (Acadêmico B).

Um fractal é formado por infinitos níveis, onde em cada nível perde-se mais das regiões (áreas). Fractal é uma estrutura geométrica³. (Acadêmico C).

É uma figura geométrica que segue iterações por meio de uma mesma regra que causa a aparição de um número ordenado de figuras que em um certo conjunto tem a forma semelhante ao nível anterior de iteração. (Acadêmico G).

São repetições de um mesmo processo da figura inicial. Na qual a região da sua área vai se tornando cada vez menor. (Acadêmico H).

São formas geométricas, com padrões complexos⁴ e definidos por fórmulas, que se repetem infinitamente. (Acadêmico K).

3 Em entrevista realizada com o Acadêmico C, ele esclareceu que utilizou o termo “estrutura geométrica” para dizer que é geometricamente estruturada, ou seja, que tem uma lógica e um cálculo por traz de cada traço, não sendo o fractal um desenho aleatório.

4 Em entrevista realizada com o Acadêmico K, ele esclareceu que utilizou o termo “padrões complexos” para tentar explicar a complexidade de obtenção de uma figura quando tende ao infinito, mas que poderia substituir esse termo por padrões geométricos tranquilamente.

Comparando as respostas apresentadas pelos Acadêmicos B, C, G, H e K, percebemos uma evolução na formalização da definição. Por exemplo, o Acadêmico B, no pré-teste, relatou que fractal seria uma figura geométrica que sofre ampliação a partir de uma imagem inicial e agora já utiliza o termo “infinitas iterações”. Os Acadêmicos C e G, no pré-teste, usaram a palavra “repetição” e nessa etapa usaram os termos “infinitos níveis” e “iteração”, respectivamente. O Acadêmico H, em ambas as definições, utilizou-se do termo “repetições”, porém explicou melhor a definição nessa etapa. Por fim, o Acadêmico K, que inicialmente se referia a fractal com uma “parte ou todo de mesmo objeto”, já observou aqui existir padrões para as repetições. Dessa forma, concluímos que houve uma melhora na organização de uma definição de fractal para esses acadêmicos.

A segunda categoria é a dos acadêmicos que responderam corretamente, mas que não formalizaram uma definição no pré-teste. Vejamos as respostas apresentadas pelos Acadêmicos D, E, I, J e L.

O fractal é construído a partir da repetição de figuras geométricas, mas sem perder seu formato original. (Acadêmico D).

A construção de um fractal se dá a partir de uma figura geométrica sem perder sua forma original, como se fosse uma repetição. (Acadêmico E).

Um fractal é um conjunto de figuras semelhantes e proporcionais a outra figura da qual elas são geradas através de iterações. (Acadêmico I).

No meu ver, é como se repetimos uma construção se baseando na 1ª e assim fazemos várias vezes a mesma coisa sem perder a essência do original. (Acadêmico J).

É uma relação que se repete de modo que aumenta ou diminui uma figura ou um segmento. (Acadêmico L).

Observando as respostas, notamos uma preocupação desses participantes em inserir no conceito de fractal as palavras: repetição, iteração, semelhante, figura geométrica, o que vai ao encontro da definição formal apresentada por Feder (1998), Falconer (2003), Gouvea e Murari (2004) e Barbosa (2005). Agrupando

as duas primeiras categorias de respostas corretas, constatamos que houve uma melhora na conceituação para aqueles que já tinham alguma ideia e também conseguimos para aqueles que não sabiam o que era fractal uma definição preliminar próxima à definição formal apresentada por esses autores. Acreditamos que isso tenha sido possível devido às mobilizações de mais de um tipo de representação (RLN, RF e RS) envolvidos nas atividades propostas.

Tivemos duas definições parcialmente corretas, observando que existe ainda uma confusão na organização das ideias para a formação desse conceito pelos acadêmicos A e F, conforme a escrita deles.

Fractal é uma maneira de calcular uma área n . (Acadêmico A).

É uma sequência de segmentos que se multiplica n vezes, quanto menor a imagem do fractal ele tende ao infinito. (Acadêmico F).

Percebemos, pela fala desses discentes, que eles tentaram reproduzir um conceito a partir de suas construções nas atividades propostas na Oficina 1 e não perceberam, como os demais colegas, que o fractal é uma forma geométrica se repetindo a partir de processos iterativos em escalas cada vez menores. Notamos que, mesmo mobilizando mais de um tipo de representação (RLN, RF e RS), ainda não foi possível ocorrer a compreensão desse conceito. Na busca de alcançar essa compreensão conceitual, iniciamos a Oficina 2 com a formalização do conceito de fractal e retomamos as definições apresentadas pelos discentes.

Após findar a Oficina 1, apresentamos, no Quadro 13, um resumo dos resultados das atividades propostas, assim como o número e a porcentagem de acadêmicos que as acertaram.

Quadro 13 – Quadro-resumo das atividades da Oficina 1

Atividades		Número de alunos que acertaram	% de acertos
Atividade 1 (esboço do desenho do fractal hexagonal de Dürer)		0	0
Atividade 2 (construção do fractal hexagonal de Dürer)		12	100
Atividade 3 (explorando o fractal hexagonal de Dürer)	Item a	12	100
	Item b	12	100
	Item c	12	100
	Item d	12	100
	Item e	12	100
	Item f	12	100
Atividade 4 (conhecendo outros fractais)	Conjunto de Cantor	12	100
	Curva de Koch	12	100
	Triângulo de Sierpinsky	12	100
	Definição de fractal	10	83

Fonte: elaborado pelos autores.

O Quadro 13 mostra que na Atividade 1 houve 0% de acertos. Julgamos ser devido à mobilização de apenas um tipo de representação, no caso o RLN, pois, para haver a compreensão, segundo Duval (2009), devemos proporcionar ao aluno pelo menos dois tipos diferentes de representação. Essa ocorreu nas demais atividades com os RLN, RF e RS, nas quais tivemos 100% de acerto, com exceção da Atividade 4, que envolvia a definição de fractal, com 83%. Essa

última porcentagem não atingiu 100% devido, como mencionado anteriormente, aos discentes procurarem reproduzir o conceito com base nas construções das atividades da Oficina 1 e não perceberam padrões como repetição e processos iterativos.

Retomando os objetivos da Oficina 1, acreditamos tê-los alcançado com êxito, pois desenvolvemos a parte história do fractal de Dürer, além de todos os acadêmicos terem construído seu fractal hexagonal de Dürer no *GeoGebra*. Também tivemos 100% de acertos nas explorações geométricas propostas e aproximadamente 83% do grupo conseguiu chegar à elaboração de um conceito correto para fractal.

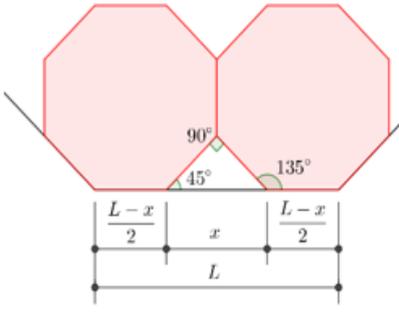
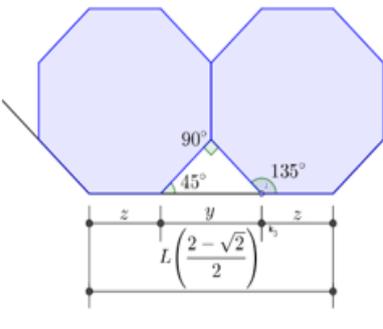
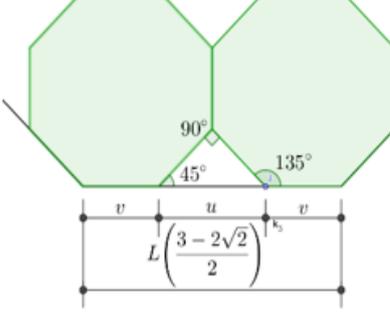
5.3 OFICINA 2: DIMENSÃO FRACTAL

Após a finalização da Oficina 1, como dito anteriormente, os acadêmicos salvaram as resoluções em seus e-mails e enviaram para o professor/pesquisador o fractal hexagonal de Dürer. A partir desse envio, comparamos os passos realizados em suas construções e percebemos que todos seguiram o passo a passo apresentado na Atividade 2 da Oficina 1. Acreditamos que essa ocorrência se deva ao fato de a construção ser um processo iterativo a partir do nível 1.

A Oficina 2, por solicitação dos discentes, foi realizada em um único dia, sendo dividida em três atividades: (1) reconhecendo fractais e sua definição; (2) fractais clássicos, seus precursores e dimensão fractal; e (3) calculando as dimensões fractais. Não estava presente nesta atividade o Acadêmico H.

Antes de iniciarmos os trabalhos, o Acadêmico L encaminhou, por e-mail, a construção do fractal octogonal de Dürer e apresentou seus cálculos da medida do lado para cada nível até 3, conforme organizado no Quadro 14.

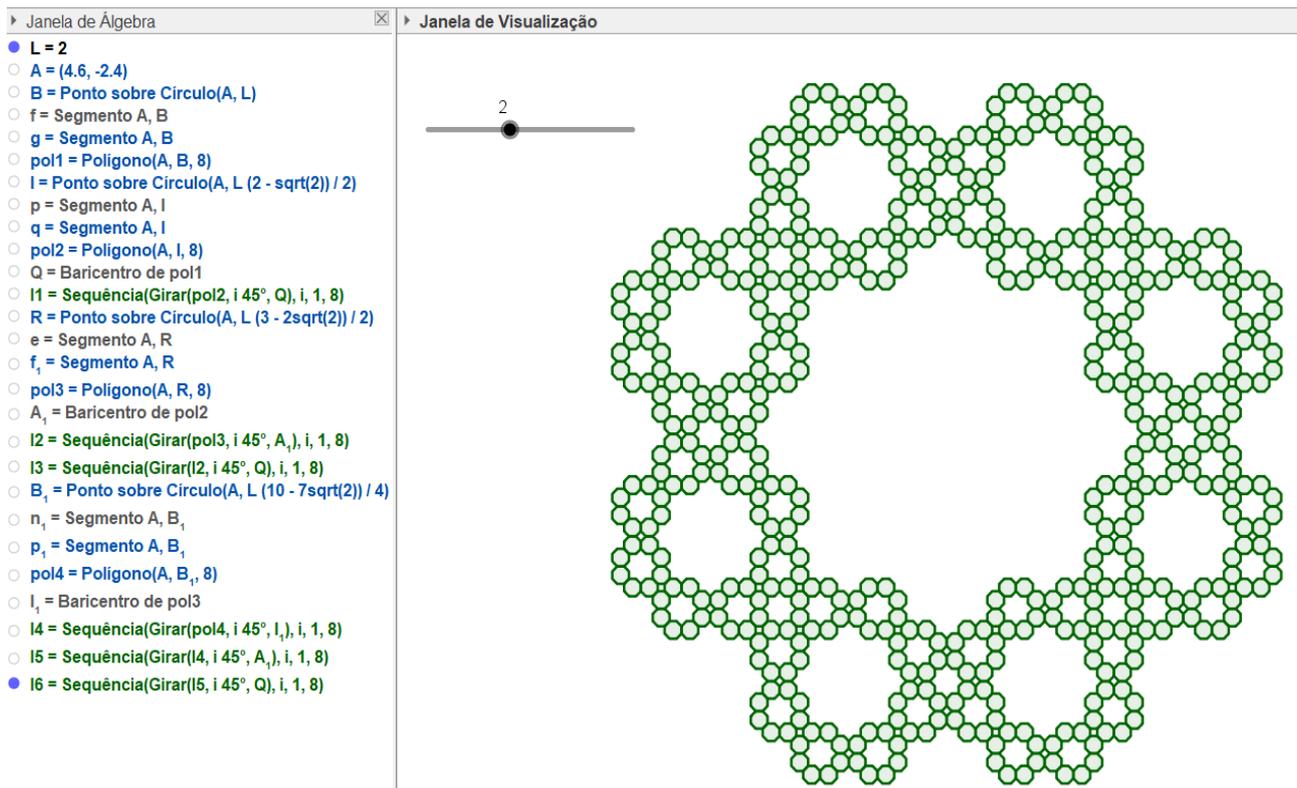
Quadro 14 – Valores das medidas dos lados do octógono nos níveis 1, 2 e 3

Nível 1	Nível 2	Nível 3
		
$x = L(\sqrt{2} - 1)$	$y = L\left(\frac{3\sqrt{2} - 4}{2}\right)$	$u = L\left(\frac{5\sqrt{2} - 7}{2}\right)$
$\frac{L-x}{2} = L\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$	$z = L\left(\frac{3-2\sqrt{2}}{2}\right)$	$v = L\left(\frac{10-7\sqrt{2}}{4}\right)$

Fonte: dados apresentados pelo Acadêmico L.

A construção e os cálculos estão corretos, o que demonstrou ele ter entendido o processo que deveria ser feito para a determinação da medida do lado de cada nível, porém agora ele realizou a construção sem a utilização de tentativa e erro como tinha feito anteriormente, para os níveis 2 e 3. O acadêmico foi questionado pelo professor/investigador sobre o tempo de construção, tendo ele relatado ter demorado mais para realizar os cálculos das medidas dos lados de cada nível do que a construção no *GeoGebra*, que foi rápida. Isso ocorreu devido a sequência de comandos e a ideia ser a mesma utilizada para a construção do fractal hexagonal de Dürer, conforme podemos ver na Figura 33.

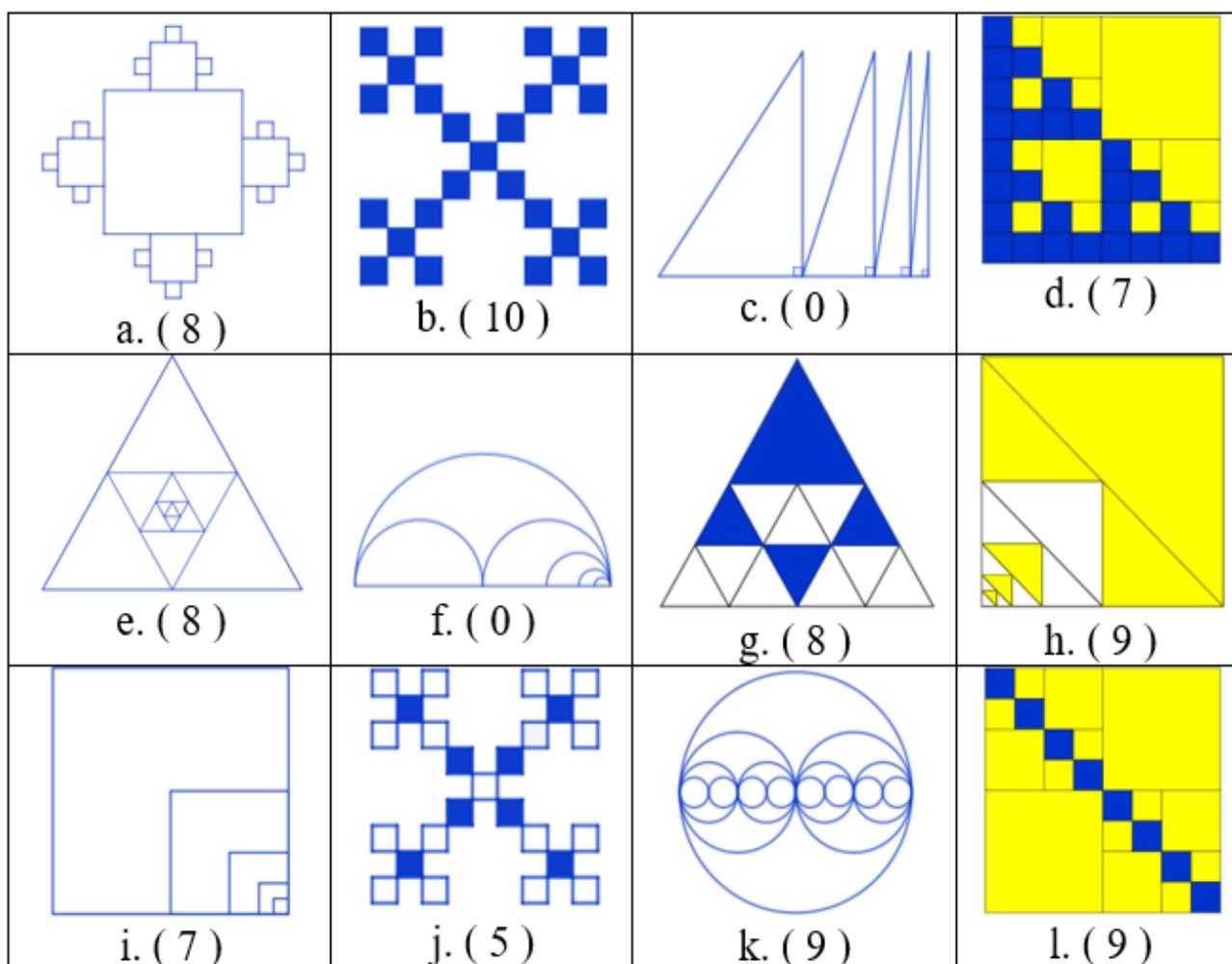
Figura 33 – Fractal octogonal de Dürer elaborado pelo Acadêmico L



Fonte: acervo dos autores.

Iniciamos a Oficina 2 retomando o conceito de fractal a partir da construção anterior e, após, foram apresentadas 12 imagens (RF). Os acadêmicos deveriam marcar quais delas representam fractais e justificar de forma geral (RLN) como essa escolha foi feita (Atividade 1). No Quadro 15, apresentamos as figuras e o respectivo número de marcações que cada uma recebeu.

Quadro 15 – Figuras geométricas Oficina 2



Fonte: acervo dos autores.

Após essa etapa, realizamos a correção, comentando sobre cada imagem e porque ela era ou não um fractal. As imagens (b), (d), (e), (g), (i), (k) e (l) representam fractais, as demais não. Durante a correção, percebemos que alguns acadêmicos que marcaram as imagens (h) e (j) relataram que as classificaram como fractal não levando em conta a região pintada nas figuras geométricas. Quando planejamos as atividades, não percebemos que poderia haver essa confusão. Também, questionamos porque a maioria selecionou a imagem (a) como fractal ao que eles responderam não haver percebido existir elemento a mais e, devido a isso, consideraram-na um fractal.

Pelas respostas apresentadas nas justificativas, acreditamos que os acadêmicos entenderam o conceito de fractal, mesmo havendo marcações em imagens que não eram fractais. Vejamos algumas respostas.

As imagens foram escolhidas por serem parecidas, só com tamanhos diferentes. (Acadêmico A).

Aparecem padrões geométricos. (Acadêmico B).

Fractal é uma figura geométrica que possui vários níveis, e cada nível de tamanho diferente. (Acadêmico C).

As imagens escolhidas têm algo em comum, todas as formas geométricas se repetem mais de uma vez sempre em tamanho menor. (Acadêmico F).

Padrões de figuras formadas, sob uma mesma condição, observando área total da figura de origem. (Acadêmico K).

O todo se repete em escala menor, porém seguindo o mesmo padrão. (Acadêmico L).

O intervalo de tempo entre as oficinas foi de uma semana e, a partir das respostas apresentadas anteriormente e do conceito solicitado na Atividade 4 da Oficina 1, percebemos que houve o entendimento do que é um fractal pelos discentes, em especial por A e F. Esses dois estudantes já haviam realizado uma conceituação considerada parcialmente correta. O Acadêmico A, anteriormente, tinha relatado que o fractal seria uma maneira de se calcular uma área e agora percebe a existência de um padrão de construção em tamanhos diferentes. O Acadêmico F tinha conceituado fractal a partir de uma sequência de segmentos e, nesse momento, ele percebeu a existência de “algo em comum” e um padrão de repetição nas imagens.

Dando seguimento, foi formalizada a definição de fractal baseada nos autores Stewart (1996), Barbosa (2005) e Feder (1988). Os discentes comentaram que suas respostas estavam certas com as apresentadas pelos autores. Sendo assim, percebemos que, por meio da mobilização dos RRS realizados na Oficina 1, os acadêmicos conseguiram compreender e gerar um conceito correto para fractal.

Finalizada a Atividade 1, iniciamos a Atividade 2, apresentando a história dos fractais e seus precursores, o que gerou uma maior atenção dos participantes para, posteriormente, desenvolverem o cálculo da dimensão fractal.

Acreditamos que o emprego da História da Matemática pode auxiliar no conhecimento matemático, ajudando o discente a compreender os métodos e fórmulas utilizados atualmente na Matemática. D'Ambrosio (2012, p. 27) relata que a História da Matemática “[...] é um elemento fundamental para perceber como teorias e práticas matemáticas foram criadas, desenvolvidas e utilizadas num contexto específico de sua época.” Apoiados nessa ideia do autor, optamos em trabalhar os fractais clássicos e seus precursores para, posteriormente, apresentar o cálculo da determinação da dimensão fractal.

Para facilitar o entendimento da dimensão fractal, optamos em utilizar as figuras geométricas já conhecidas da Geometria Euclidiana (segmento de reta, quadrado e cubo) e realizar algumas análises por meio de preenchimento de quadros. Nessa atividade apresentamos um RF e solicitamos que os acadêmicos realizassem um RS, isto é, uma conversão de RF para RS, sendo esses os registros de partida. Após o preenchimento e a análise dos quadros, por meio do RS, os acadêmicos determinaram uma fórmula usando manipulações algébricas para o cálculo da dimensão fractal. Esse seria o registro de chegada (RS). Segundo Roncaglio e Nehring (2019, p. 85), “a compreensão da grande variedade de registros de representações utilizados em Matemática determina o seu ensino e a sua aprendizagem”. Portanto, faz sentido mobilizarmos mais de uma representação e verificarmos se os acadêmicos chegaram à determinação da fórmula da dimensão fractal.

O primeiro quadro que deveria ser preenchido envolve a divisão de um segmento de reta em 2, 3 e 4 partes. Na Figura 34, apresentamos as respostas do Acadêmico G.

Figura 34 – Repostas apresentadas pelo Acadêmico G para a divisão de um segmento

Figura obtida	Número de divisões (ou número de segmentos obtidos) N	Fator de redução r	Relação entre N e r $N = \frac{1}{r^1}$
	1	1	$1 = \frac{1}{1^1}$
	2	$1/2$	$2 = \frac{1}{(1/2)^1}$
	3	$1/3$	$3 = \frac{1}{(1/3)^1}$
	4	$1/4$	$4 = \frac{1}{(1/4)^1}$

Fonte: acervo dos autores.

Já o segundo quadro a ser preenchido envolvia a divisão de cada lado de um quadrado em 2, 3 e 4 partes. Na Figura 35, apresentamos as respostas do Acadêmico G.

Figura 35 – Repostas apresentadas pelo Acadêmico G para a divisão dos lados de um quadrado

Figura obtida	Número de divisões (ou número de peças geradas) N	Fator de redução r	Relação entre N e r $N = \frac{1}{r^2}$
	1	1	$1 = \frac{1}{1^2}$
	4	$1/2$	$4 = \frac{1}{(1/2)^2}$
	9	$1/3$	$9 = \frac{1}{(1/3)^2}$
	16	$1/4$	$16 = \frac{1}{(1/4)^2}$

Fonte: acervo dos autores.

Por último, o terceiro quadro a ser preenchido envolvia a divisão de cada aresta de um cubo em 2, 3 e 4 partes. Na Figura 36 apresentamos as respostas do Acadêmico G.

Figura 36 – Repostas apresentadas pelo Acadêmico G para a divisão dos lados de um cubo

Figura obtida	Número de divisões (ou número de peças geradas) N	Fator de redução r	Relação entre N e r $N = \frac{1}{r^3}$
	1	1	$1 = \frac{1}{1^3}$
	8	$1/2$	$8 = \frac{1}{(1/2)^3}$
	27	$1/3$	$27 = \frac{1}{(1/3)^3}$
	64	$1/4$	$64 = \frac{1}{(1/4)^3}$

Fonte: acervo dos autores.

Ao término desta etapa, percebemos que os acadêmicos não tiveram dificuldades no preenchimento dos quadros, todos chegaram às respostas corretas. Quando pensamos nas possíveis respostas dos discentes para a última coluna (relação entre o N e r), optamos por induzir previamente uma resposta ($N = \frac{1}{r^D}$, $D = 1, 2$ ou 3), no intuito de facilitar a determinação da fórmula do cálculo da dimensão fractal. Depois da obtenção das respostas, percebemos que teria sido melhor não ter apresentado a relação entre N e r , pois poderiam ocorrer outros resultados e explorações, enriquecendo, assim, a discussão em sala de aula e posteriormente nossa análise.

Entretanto, ainda faltava um passo para obterem a fórmula da dimensão fractal, ao que foram questionados sobre como seria uma relação genérica entre a quantidade (N) e o coeficiente de redução (r). Eles responderam que poderia ser representado por $N = \frac{1}{r^D}$ em que (D) é a dimensão. Continuando, perguntamos se poderíamos representar (N) de outra forma. Os acadêmicos responderam afir-

mativamente e poderia ser representado por $N = \left(\frac{1}{r}\right)^D$. A partir desse último RS, os discentes realizaram a dedução da fórmula da dimensão fractal. Na Figura 37, apresentamos as manipulações algébricas do Acadêmico E.

Figura 37 – Dedução da fórmula da dimensão fractal apresentada pelo Acadêmico E

Handwritten derivation of the fractal dimension formula:

$$N = \left(\frac{1}{r}\right)^D$$

Aplicando logaritmo em ambos os lados:

$$\log N = \log \left(\frac{1}{r}\right)^D$$

$$\log N = D \cdot \log \left(\frac{1}{r}\right)$$

$$D = \frac{\log N}{\log \left(\frac{1}{r}\right)}$$

Fonte: acervo dos autores.

Os participantes chegaram à fórmula da dimensão fractal, porém alguns alunos tiveram dificuldade em aplicar propriedades de logaritmos, o que foi sanado pelo professor/pesquisador fazendo uma breve revisão das propriedades operatórias.

Para finalizar a Oficina 2, faltava a Atividade 3 e, para isso, fizemos um desafio: calcular a dimensão fractal de oito fractais na planilha e janela *CAS* do *GeoGebra*. Ao serem perguntados se já haviam trabalhado com esses recursos, responderam que não, então fizemos uma breve explicação de como deveriam ser inseridos os dados nas duas ferramentas do *software*.

Quando planejamos essa atividade, levamos em conta que os jovens “[...] estão cada vez mais conectados às tecnologias digitais, configurando-se como uma geração que estabelece novas relações com o conhecimento e que, portanto, requer que transformações aconteçam na escola”. (BACICH, NETO, TREVISANI, 2015, p. 47). Por esse viés, introduzimos o uso dessas duas novas ferramen-

tas (planilha e janela CAS) para os discentes. Valente (2015, p. 15) afirma: “[...] criando oportunidades para a construção de seu conhecimento, o professor tem a função de mediador, consultor do aprendiz”. Julgamos ser necessário o incentivo e o uso das TD nos cursos de licenciatura, no caso presente, da licenciatura em Matemática e, para tal, promover a instrumentalização desses acadêmicos para suas futuras práticas pedagógicas.

Dando seguimento, os acadêmicos, por unanimidade, iniciaram os cálculos pela janela CAS e, posteriormente, completaram a planilha para comparar os resultados encontrados. Na Figura 38, apresentamos os RS do Acadêmico C. Nessa atividade não houve conversão, e sim tratamento, pois a representação do objeto matemático conservou o próprio registro de origem, ou seja, o registro de partida e os de chegada foram os mesmos (RS).

Figura 38 – Planilha e Janela CAS apresentada pelo Acadêmico C

Fractal	Número de divisões (N)	r	log(N)	log(r)	Dimensão do fractal
1 Fractal					
2 Conjunto de Cantor	2	0.333	0.501	0.477	0.631
3 Curva de Peano	9	0.333	0.954	0.477	2
4 Curva de Hilbert	4	0.5	0.602	0.301	2
5 Curva de Koch	4	0.333	0.602	0.477	1.262
6 Triângulo de Sierpinsky	3	0.5	0.477	0.301	1.585
7 Tapete de Sierpinsky	8	0.333	0.903	0.477	1.893
8 Tetraedro de Sierpinsky	4	0.6	0.602	0.301	2
9 Esponja de Menger	20	0.333	1.301	0.477	2.727
10					
11					
12					
13					
14					
15					
16					
17					
18					
19					
20					
21					
22					
23					
24					
25					
26					
27					
28					
29					
30					

Fonte: acervo dos autores.

Como foi novidade para os discentes esse tipo de trabalho com planilha e janela *CAS* no *GeoGebra*, resolvemos fazer duas perguntas: o que você poderia dizer sobre a utilização dessas ferramentas para calcular a dimensão fractal? De qual delas mais gostou? Pelas respostas apresentadas, concluímos que eles gostaram das ferramentas e aprenderam a utilizar outras que o *GeoGebra* oferece. Porém, o grupo ficou dividido, sendo que alguns gostaram mais da planilha e outros mais da janela *CAS*, como vemos em algumas respostas a seguir.

Gostei mais da janela CAS, é mais simples de montar. Acabei me perdendo um pouco na planilha. Achei interessante, não sabia que existia, é sempre bom e importante saber mais. (Acadêmico C).

Achei muito interessante a utilização destes recursos, uma prática importante de se trabalhar. Gostei mais da planilha, por apresentar recursos simples de calcular. (Acadêmico E).

Eu achei muito boa a experiência de utilizar esses recursos, particularmente gostei mais de utilizar a planilha, pois é mais simples de se trabalhar e de compreender os processos. (Acadêmico I).

Bom, eu gostei mais da janela CAS, por ser mais simples e objetiva, embora tenha que saber o uso de log é muito melhor que a planilha. (Acadêmico J).

Consideramos ser importante o uso da planilha e da janela *CAS* no *GeoGebra*, pois podem proporcionar um ambiente para investigações e, nesse caso, os acadêmicos investigaram os valores das dimensões de alguns fractais já estudados, além de realizar explorações de forma rápida e dinâmica. Melo e Silva (2013) relatam que o *GeoGebra* proporciona condições e autonomia para os alunos construírem seus próprios conhecimentos. Por esse viés, pensamos ser importante incentivar os acadêmicos a conhecerem e experimentarem outros recursos que o *GeoGebra* disponibiliza, o que confirma os registros dos estudantes.

Questionamos os alunos em relação a sua preferência e eles relataram que escolheram a planilha por se assemelhar a outras que já haviam utilizado. Os que preferiram a janela *CAS* disseram que foi pela curiosidade e por aprenderem uma ferramenta nova do *GeoGebra*.

Após terminar a Oficina 2, mostramos, no Quadro 16, um resumo dos resultados das atividades propostas, assim como o número e a porcentagem de acadêmicos que as acertaram.

Quadro 16 – Quadro-resumo das atividades da Oficina 2

Atividades		Número de alunos que acertaram	% de acertos
Atividade 1 (reconhecendo fractais e sua definição)	Imagem (a)	3	27
	Imagem (b)	10	91
	Imagem (c)	11	100
	Imagem (d)	7	64
	Imagem (e)	8	73
	Imagem (f)	11	100
	Imagem (g)	8	73
	Imagem (h)	2	18
	Imagem (i)	7	64
	Imagem (j)	6	54
	Imagem (k)	9	82
	Imagem (l)	9	82
Atividade 2 (fractais clássicos e seus precursores e dimensão fractal)		11	100
Atividade 3 (calculando as dimensões fractais)		11	100

Fonte: elaborado pelos autores.

O Quadro 16 mostra, na Atividade 1, ter havido marcações em imagens que não eram fractais. Por exemplo, na imagem (a), os discentes a marcaram por não

perceberem a existência de uma parte a mais na figura. As imagens (h) e (j) foram assinaladas devido a região estar pintada. Percebemos que a maioria marcou as imagens que são fractais ((b), (d), (e), (g), (i), (k), (l)). Fazendo uma média dos acertos, encontramos 69% de marcações corretas. Atribuímos que esse valor não ter atingido 100% foi devido à utilização de um único tipo de representação, o RF. Se fôssemos aplicar novamente essa atividade, seria importante não apenas retomar verbalmente os conceitos elaborados na Atividade 4 da Oficina 1, mas já apresentar, de forma escrita (RLN), a definição formal trazida pelos autores Stewart (1996), Barbosa (2005) e Feder (1988). Dessa maneira, teríamos dois tipos de registros (RLN e RF) antes de pedirmos aos discentes para marcar as imagens fractais e quem sabe, dessa forma, aumentar o índice de acertos.

Para a Atividade 2, já tivemos uma preocupação de mobilizar mais de um tipo de representação, no caso o RF e o RS, e o resultado final foi que todos os acadêmicos chegaram à fórmula do cálculo da dimensão fractal. Por esse viés, apoiando em Duval (2009), percebemos a necessidade de mobilizar pelo menos dois tipos diferentes de representação.

Para a Atividade 3, os acadêmicos tiveram 100% de acerto no cálculo da dimensão fractal ao utilizarem a fórmula (RS) obtida na Atividade 2 e usaram, para sua determinação e comparação, os valores da planilha e janela CAS. Nessa atividade não houve conversão entre os registros, como nas anteriores, e sim tratamento, pois, como Henriques e Almouloud (2016) afirmam, se permanecemos em um mesmo sistema de registro, nesse caso RS, estaremos realizando tratamento.

Ao final dessa oficina, percebemos que ela ficou mais teórica e expositiva que as demais. Porém, acreditamos ser importante apresentar a esses futuros professores que a dimensão de um objeto não necessariamente pertence ao conjunto $\{0, 1, 2, 3\}$, característica que as figuras euclidianas possuem, mas que podem

pertencer ao intervalo $[0, 3]$, particularidade das figuras fractais. Mesmo assim, conseguimos alcançar os objetivos dessa oficina, pois os alunos conseguiram reconhecer os fractais, deduziram a fórmula da dimensão fractal e finalizaram calculando algumas dimensões fractais.

5.4 OFICINA 3: CURVA DE PEANO

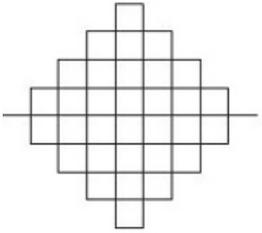
A Oficina 3, novamente realizada em um único encontro, no intervalo de uma semana, foi dividida em três atividades: (1) conhecendo, (2) construindo e (3) explorando a Curva de Peano. Não estava presente nas atividades o Acadêmico D.

Antes de mostrarmos a imagem da Curva de Peano, desafiamos os acadêmicos a imaginar e apresentar um esboço a partir da apresentação da definição desse fractal.

Segundo Hilbert e Cohn-Vossen (1990, p. iii, tradução nossa) a imaginação visual pode “[...] iluminar a variedade de fatos e de problemas de Geometria e, além disso, é possível, em muitos casos, retratar o esboço geométrico dos métodos de investigação e demonstração [...]”. Exploramos a imaginação a partir da visualização que, para Dreyfus (1991), é um processo pelo qual as representações mentais ganham vida. Corroborando essa ideia, Cifuentes (2010, p. 25) conclui: “a visualização é uma forma de pensamento e, portanto, é possível também argumentar através dela”.

Dessa forma, apresentamos um RLN e verificamos se houve ou não a conversão para o RF. No Quadro 17, trazemos como se efetua a construção da Curva de Peano (RLN) e a imagem (RF) do referido fractal.

Quadro 17 – Conversão do RLN para RF na Curva de Peano

RLN	RF
<p>Para iniciá-la, tomemos um segmento de reta de comprimento unitário. Dividimos esse segmento em três partes congruentes. No segmento central, desenhamos um retângulo, que é dividido pelo segmento inicial em dois quadrados congruentes. Ao final dessa primeira iteração, obtemos 9 segmentos de comprimento $1/3$ cada. Para a segunda iteração, vamos repetir os passos anteriores, assim vamos obter 81 segmentos de comprimento $1/9$.</p>	

Fonte: elaborado pelos autores.

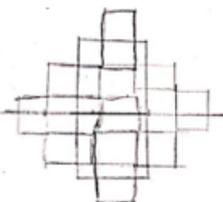
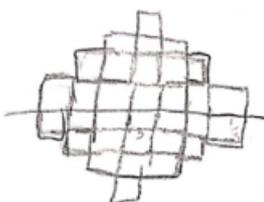
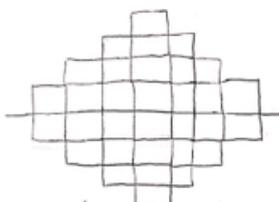
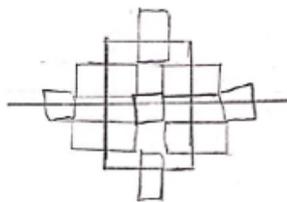
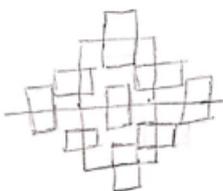
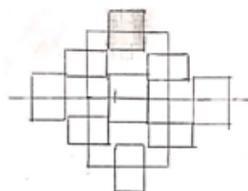
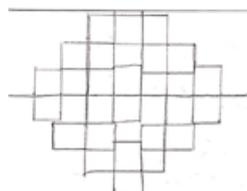
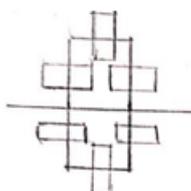
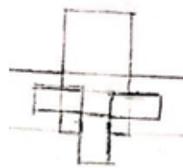
Para Roncaglio e Nehring (2019, p. 84), “é fundamental o trabalho com as representações semióticas que sustentam a construção do conhecimento pelos sujeitos, em processo de aprendizagem, uma vez que elas possibilitam o desenvolvimento das funções cognitivas essenciais do pensamento humano”. Nesse sentido, estamos estimulando os acadêmicos a realizarem suas representações, nesse caso RF, e conseqüentemente a conversão do RLN para o RF.

A coordenação entre esses dois tipos de registros só se dará por meio de duas operações: tratamentos e conversões. Nesse caso, na Atividade 1, estamos realizando conversão, pois segundo Duval (2009, p. 58), “converter é transformar a representação de um objeto de uma situação ou de uma informação dada num registro em uma representação desse mesmo objeto, dessa mesma situação ou da mesma informação num outro registro”.

Para a realização de uma análise de conversão, é necessário existir uma representação no registro de partida, assim como uma representação terminal ou registro de chegada. (DUVAL, 2009). Como estamos trabalhando com dois tipos de registros: o RLN e o RF, o primeiro é o registro de partida e o segundo, o registro de chegada.

No Quadro 18, apresentamos os esboços dos trabalhos dos acadêmicos. Percebemos que os estudantes A, B, C, E, G, H, I conseguiram realizar a conversão do RLN para o RF de forma correta. Os demais discentes realizaram uma representação próxima à ideia da Curva de Peano. Portanto, conseguimos mobilizar representações mentais a partir da imaginação e da visualização, concordando com os estudos de Hilbert e Cohn-Vossen (1990), Dreyfus (1991) e Cifuentes (2010).

Quadro 18 – Esboços apresentados para a Curva de Peano

<p>Acadêmico A</p> 	<p>Acadêmico B</p> 	<p>Acadêmico C</p> 	<p>Acadêmico E</p> 
<p>Acadêmico F</p> 	<p>Acadêmico G</p> 	<p>Acadêmico H</p> 	<p>Acadêmico I²</p> 
<p>Acadêmico J</p> 		<p>Acadêmico K</p> 	<p>Acadêmico L</p> 

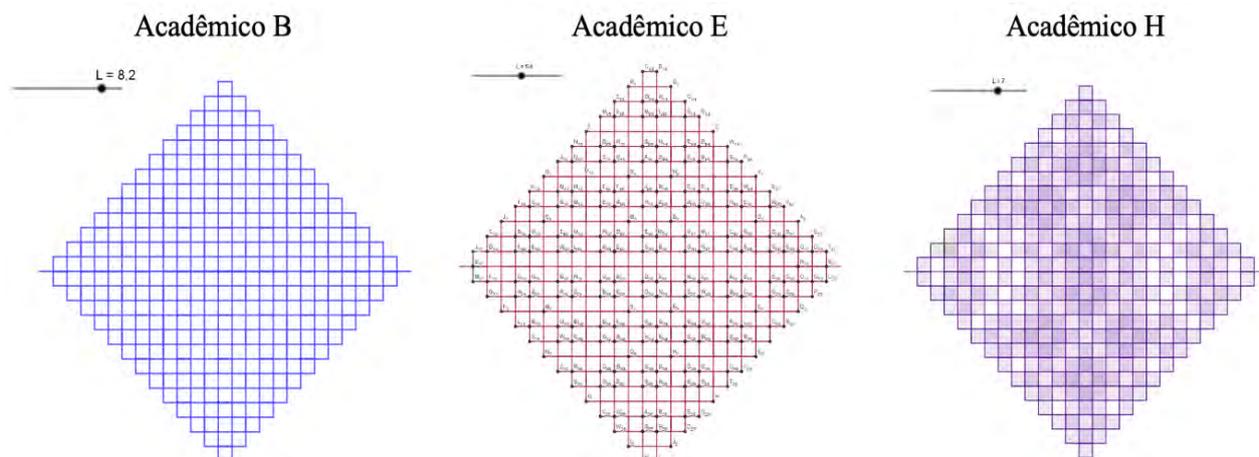
Fonte: acervo dos autores.

Para finalizar esta primeira atividade, apresentamos a imagem para o fractal Curva de Peano e comentamos sobre os esboços realizados pelos estudantes F, J, K e L os quais relataram terem entendido a sua construção, porém não haviam

conseguido esboçá-la conforme os demais participantes, por não terem aptidão para o desenho. O Acadêmico K também relatou que não teve tempo suficiente para a realização da atividade. Observando os esboços desses participantes, vemos que eles iniciaram a primeira iteração com a construção de forma correta, dividindo um segmento de reta unitário em três partes congruentes e no segmento central desenharam um retângulo (dividido pelo segmento inicial em dois quadrados congruentes). Para a segunda iteração, eles deveriam ter feito o mesmo processo anterior, porém, foi nesse passo que se equivocaram e não perceberam que os retângulos desenhados teriam alguns de seus vértices ligados a outros vértices de retângulos. Se houvesse essa percepção, haveria uma porcentagem maior de representações corretas.

Comparando com a Atividade 1 da Oficina 1 (esboço do fractal hexagonal de Dürer), constatamos haver uma melhoria significativa nas representações, pois aproximadamente 64% conseguiram esboçar a Curva de Peano conforme deveria ser. Não houve, naquela situação, nenhum esboço correto para o fractal hexagonal de Dürer.

A Atividade 2, da Oficina 3 envolveu a construção da Curva de Peano no *GeoGebra*. Da mesma forma que na confecção do fractal hexagonal de Dürer, foi apresentado um passo a passo de sua construção. Explicamos como fazer para os níveis 0 e 1 e os acadêmicos solicitaram um tempo para tentarem realizar os níveis 2 e 3. Todos os participantes concluíram a tarefa (RF), conforme podemos observar na Figura 39, com as construções dos acadêmicos B, E e H.

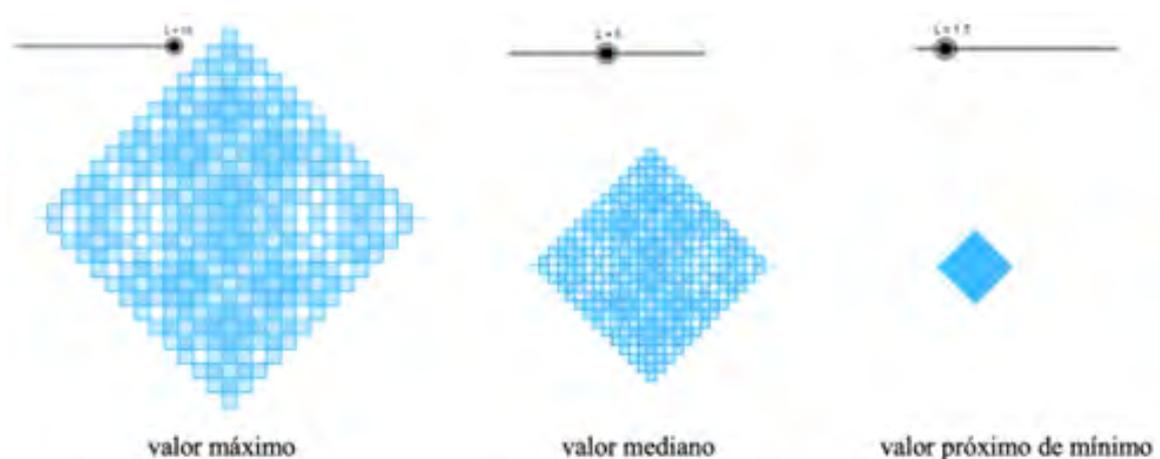
Figura 39 – Curva de Peano apresentada pelos Acadêmicos B, E e H

Fonte: acervo dos autores.

Notamos que os acadêmicos tiveram maior facilidade na hora da construção. Isso pode ser devido a dois fatores: o primeiro por eles já estarem familiarizados com os comandos do *GeoGebra*; e o segundo, pela construção ser realizada por processos iterativos a partir do nível 1.

Ao final da construção, o Acadêmico G percebeu uma propriedade e comentou que, se movimentasse o controle deslizante para um valor máximo, um valor mínimo e um valor mediano, a área da região apresentada na tela seria a de um quadrado de lado L (Figura 40). Foi a partir da visualização que esse discente inferiu um dos futuros questionamentos que faríamos a respeito da Curva de Peano. Isso vem ao encontro da ideia de Cifuentes (2010) quando relata que, por meio da visualização, é possível argumentar e esse foi um exemplo prático disso.

Figura 40 – Curva de Peano apresentada pelo Acadêmico G



Fonte: acervo do autor.

Após a finalização das construções, iniciamos a Atividade 3. Nessa parte da oficina, iríamos fazer questionamentos que analisassem a construção realizada. O primeiro deles era referente ao número de segmentos e à área gerada em cada quadrado, ou seja, os acadêmicos, usando os RLN e RF, deveriam observar e realizar um RS desde o nível 0 até chegar ao nível n . Portanto, tivemos como registros de partida o RLN e o RF e como registro de chegada o RS. Vejamos, na figura 41, a resposta apresentada pelo Acadêmico L.

Figura 41 – Resposta do Acadêmico L para a primeira questão da Atividade 3 Oficina 3

a) A partir da construção da Curva de Peano, analisar e preencher o Quadro 1 determinando a medida do lado e o número de segmentos gerados em cada nível até chegar ao nível n . Salientamos que n é um número natural qualquer.

Quadro 1 - Tamanho do lado e números de segmentos gerados na Curva de Peano de nível n .

	Nível 0	Nível 1	Nível 2	Nível 3	...	Nível n
Lado	L	$\frac{L}{3}$	$\frac{L}{9}$	$\frac{L}{27}$...	$\frac{L}{3^n}$
Número de segmentos	3	9	81	729	...	9^n
Área de cada quadrado gerado	L^2	$\frac{L^2}{9}$	$\frac{L^2}{27}$	$\frac{L^2}{229}$...	$\frac{L^2}{9^n}$

Fonte: acervo dos autores.

Não houve dificuldade para esse primeiro questionamento e todos chegaram à resposta correta, conseqüentemente concluímos que houve conversão entre os registros. Em seguida, passamos para o segundo questionamento, referente

à soma do comprimento dos segmentos da Curva de Peano. Essa questão foi dividida em duas partes, a primeira refere-se ao preenchimento de um quadro e a segunda é relativa à soma do comprimento dos segmentos. Da mesma forma que na questão anterior, os registros de partida foram o RLN e o RF e registro de chegada o RS. Vejamos, na Figura 42 a resposta do Acadêmico C para a primeira parte do segundo questionamento.

Figura 42 – Resposta do Acadêmico C para a primeira parte da segunda questão da Atividade 3 Oficina 3

b) Se pensar em um valor para n muito elevado, ou seja, quando n tende a infinito, o que ocorre com a soma do comprimento dos segmentos, isto é, S_n ?

A soma do comprimento dos segmentos na Curva de Peano é dada pelo número de segmentos multiplicado pelo tamanho do seu lado. Para melhor organização preencha o Quadro 2.

Quadro 2 – Soma do comprimento dos segmentos na Curva de Peano.

Nível	Soma dos segmentos
0	$1l = l$
1	$S_1 = 3 \cdot \frac{l}{3} = \frac{9}{3} l = 3l$
2	$S_2 = 81 \cdot \frac{l}{9} = \frac{81}{9} l = 9l$
3	$S_3 = 729 \cdot \frac{l}{27} = \frac{729}{27} l = 27l$
⋮	⋮
n	$S_n = 9^n \cdot \frac{l}{3^n} = \frac{3^{2n}}{3^n} l = 3^{2n-n} l = 3^n l$

Fonte: acervo dos autores.

Já na segunda parte do questionamento, os participantes chegaram à resposta esperada, porém quatro deles responderam usando a notação de limite (RS), dois optaram por escrever (RLN) e cinco atenderam à solicitação por meio da escrita e notação de limite (RLN e RS). Concluímos que houve conversão entre os registros. Na Figura 43, apresentamos a resposta do Acadêmico C, que utilizou duas notações para fazer sua justificativa.

Figura 43 – Resposta do Acadêmico C para a segunda questão da Atividade 3 da Oficina 3

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 3^n l = \infty$$

Quanto maior for o valor de n , menor será cada segmento, que tenderá ao infinito quando somado todos segmentos.

Fonte: acervo dos autores.

Outra forma de responder seria utilizando a planilha do *GeoGebra*. Foi demonstrado como a mesma poderia ser utilizada e apresentamos a solução, comparando com as respostas obtidas pelos discentes. Mostramos que o resultado é o mesmo utilizando os dois recursos.

Os próximos 3 questionamentos foram referentes ao número de segmentos e número de quadrados gerados na Curva de Peano entre o nível 0 e o 1; entre o nível 1 e o 2 e entre o nível 2 e o 3. Para facilitar as respostas, foram apresentadas as imagens dos níveis 0, 1 e 2, para ser feita a contagem. Os discentes já haviam construído o nível 3 anteriormente. Não houve dificuldades para apresentarem as respostas, como pode ser observado na Quadro 19.

Quadro 19 – Respostas apresentadas pelos Acadêmicos E, K e L para o terceiro, quarto e quinto questionamentos da Oficina, respectivamente

<p>c) Com base na imagem, o que você observa que está ocorrendo na passagem da construção do nível 0 para o nível 1?</p> <p>Nível 0 Nível 1</p>	<p>Resposta do Acadêmico E</p> <p>O comprimento do segmento de nível 0 é um segmento de comprimento l</p> <p>E, o nível 1 possui 9 segmentos, ou seja, o tamanho do segmento é $\frac{l}{3}$</p>
<p>d) Com base na imagem, o que você observa que está ocorrendo na passagem da construção do nível 1 para o nível 2?</p> <p>Nível 1 Nível 2</p>	<p>Resposta do Acadêmico K</p> <p>Nível 1 9 segmentos $\frac{l}{3}$ comprimento 2 quadrados</p> <p>Nível 2 81 segmentos $\frac{l}{9}$ tamanho 32 quadrados</p>
<p>e) Com base na imagem, o que você observa que está ocorrendo na passagem da construção do nível 2 para o nível 3?</p> <p>Nível 2 Nível 3</p>	<p>Resposta do Acadêmico L</p> <p>Nível 2 - 81 segmentos - Comprimento $\frac{l}{9}$ 32 quadrados.</p> <p>Nível 3 - 729 segmentos - Comprimento $\frac{l}{27}$ 338 quadrados.</p>

Fonte: acervo dos autores.

Acreditávamos que, para o quinto questionamento, os participantes poderiam ter dificuldades em determinar o número de quadrados gerados na Curva de Peano no nível 3. Porém, quase que imediatamente, eles foram para a tela do computador e contaram quantos quadrados havia na figura. Novamente, fizeram o uso da visualização, no sentido apontado por Arcavi (2003) para chegar a uma resposta.

Nos cinco primeiros questionamentos, tivemos como registro de partida os RLN e RF e, como registro de chegada, os acadêmicos apresentaram o RS e/ou o RLN. Essas atividades foram pensadas e elaboradas para que os participantes mobilizassem mais de um tipo de representação, o que é sugerido por Duval (2009) e, a partir delas, chegassem por meio de tratamentos e conversões à resposta correta. Conjecturamos que houve a compreensão dos objetos matemáticos mobilizados nessas atividades.

Nesse contexto, destacamos a relevância dos recursos trazidos pelo *GeoGebra* para que os alunos possam buscar seus próprios caminhos na direção do conhecimento matemático. Assim, dentro de um ambiente controlado de erro, podem dar vazão as suas ideias sem que passos equivocados tragam maiores consequências. Essa liberdade de tentar, sem receio de errar, poderá contribuir para o gosto pela experimentação, que levará à construção de novas ideias, conceitos e pensamentos. Nesse sentido, Papert (1994) destaca que as construções mentais ocorrem de modo especialmente venturoso quando são apoiadas pela construção mais pública, no mundo concreto. Assim, criam-se possibilidades de exames, discussões e conjecturas. Ainda, o autor ressalta que as TD devem ser utilizadas como instrumentos que auxiliam o aluno a trabalhar e a pensar, tornando-se meios para a realização de projetos, fonte de pesquisa de conceitos e um elemento capaz de trazer ao mundo real construções mentais diversas.

Para finalizar, o sexto e último questionamento foi: se continuarmos as iterações até chegarmos a um nível n , em que n é um valor muito elevado (n tenden-

do a infinito), o que podemos conjecturar a respeito da área da superfície formada nesse processo? Essa questão corresponde àquela que o Acadêmico G havia respondido, anteriormente, por meio da visualização.

Que cada vez mais vai ser preenchida com os quadradinhos, podendo ser calculada pela área do quadrado. (Acadêmico A).

Com n muito elevado, o valor da área da superfície irá tender a ser a área do quadrado. (Acadêmico B).

A área vai ser totalmente preenchida, podendo ser calculada pela área do quadrado. (Acadêmico C).

A área de um quadrado. (Acadêmico E).

Que a área da figura fica preenchida e forma um quadrado, sendo que sua área pode ser calculada por l^2 . (Acadêmico F).

Ela pode ser calculada pela área do quadrado de lado l . (Acadêmico G).

A área vai ficar cada vez mais preenchida, até ficar totalmente, e poderá ser calculada pela área de um quadrado. (Acadêmico H).

Quando n tender ao infinito a área da figura ficará cada vez mais próxima de ser totalmente preenchida se assemelhando e podendo ser calculada como a área de um quadrado de lado l . (Acadêmico I).

Uma área de um quadrado. (Acadêmico J).

A área será totalmente preenchida e poderá ser calculada pela área de um quadrado. (Acadêmico K).

Vai ficar igual a área de um quadrado. (Acadêmico L).

Podemos observar que todos os discentes chegaram à conclusão de que, quando n for muito elevado, o valor da área da superfície tende a ser a área de um quadrado, porém apenas os acadêmicos F, G e I relataram que essa área poderia ser calculada pela medida do lado desse quadrado.

Após terminar o relato da Oficina 3, mostramos, no Quadro 20, um resumo dos resultados das atividades propostas, assim como o número e a porcentagem de acadêmicos que as acertaram.

Quadro 20 – Quadro-resumo das atividades da Oficina 3

Atividades		Número de alunos que acertaram	% de acertos
Atividade 1 (conhecendo a Curva de Peano)		7	64
Atividade 2 (construção da Curva de Peano)		11	100
Atividade 3 (explorando a Curva de Peano)	Item a	11	100
	Item b	11	100
	Item c	11	100
	Item d	11	100
	Item e	11	100
	Item f	11	100

Fonte: elaborado pelos autores.

O Quadro 20 mostra que, na Atividade 1, houve 64% de acertos. Constatamos uma melhora grande em relação à Atividade 1 da Oficina 1, na qual não houve acerto. Em conversa com os acadêmicos, eles justificaram essa melhoria devido a acharem que a descrição da construção da Curva de Peano (RLN) estava melhor escrita.

A Atividade 2, em função de eles estarem mais familiarizados aos comandos do *GeoGebra* e de que o número de passos para realizar cada iteração ser menor, percebemos que a construção realizada foi mais rápida em comparação com a do fractal hexagonal de Dürer.

No entanto, para as Atividade 3, como tivemos a preocupação de mobilizar pelo menos dois tipos de registros (RLN e RF) e, conseqüentemente, tratamentos e conversões entre eles, acreditamos ser esse um dos motivos pelos quais todos os acadêmicos chegaram às respostas corretas. Colaborando essa ideia, Damm (2012) relata que, quando pensamos no processo de ensino e de aprendizagem, devemos não só levar em conta a formação das representações e os tratamentos, mas também a conversão entre os diferentes tipos de registros de representação de um mesmo objeto matemático.

Também, durante a aplicação da segunda questão (item b) dessa atividade, percebemos que poderíamos ter solicitado aos acadêmicos a utilização da plani-

lha do *GeoGebra* para chegar à resposta e, dessa forma, incentivar o uso dessa ferramenta.

Ao concluir essa oficina, constatamos que novamente conseguimos alcançar os objetivos propostos, desenvolvendo a parte histórica, a construção e as explorações de relações geométricas da Curva de Peano. Isso foi percebido pelas respostas aos questionamentos apresentadas pelos discentes.

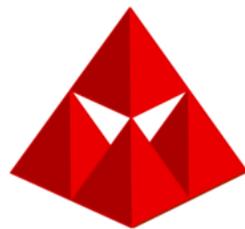
5.5 OFICINA 4: TETRAEDRO DE SIERPINSKY

A Oficina 4, realizada em um único dia, no intervalo de uma semana, foi dividida em três atividades: (1) conhecendo, (2) construindo e (3) explorando o Tetraedro de Sierpinsky. Nessa última oficina, não estavam presentes os Acadêmicos F e G.

Com o intuito de estimular a imaginação e a visualização, antes de exibirmos a imagem do Tetraedro de Sierpinsky, solicitamos realizarem um esboço dele a partir da apresentação da sua definição. Para Flores (2007, p. 34), “a visualização não é como um fim em si mesma, mas um meio para o entendimento de conceitos matemáticos”. Nesse sentido, acreditamos ser importante estimular a imaginação e a visualização dos discentes.

Assim, apresentamos um RLN (registro de partida) e verificamos se houve ou não a conversão para o RF (registro de chegada). No Quadro 21, trazemos como efetuar a construção do Tetraedro de Sierpinsky (RLN) e a imagem (RF) do referido fractal.

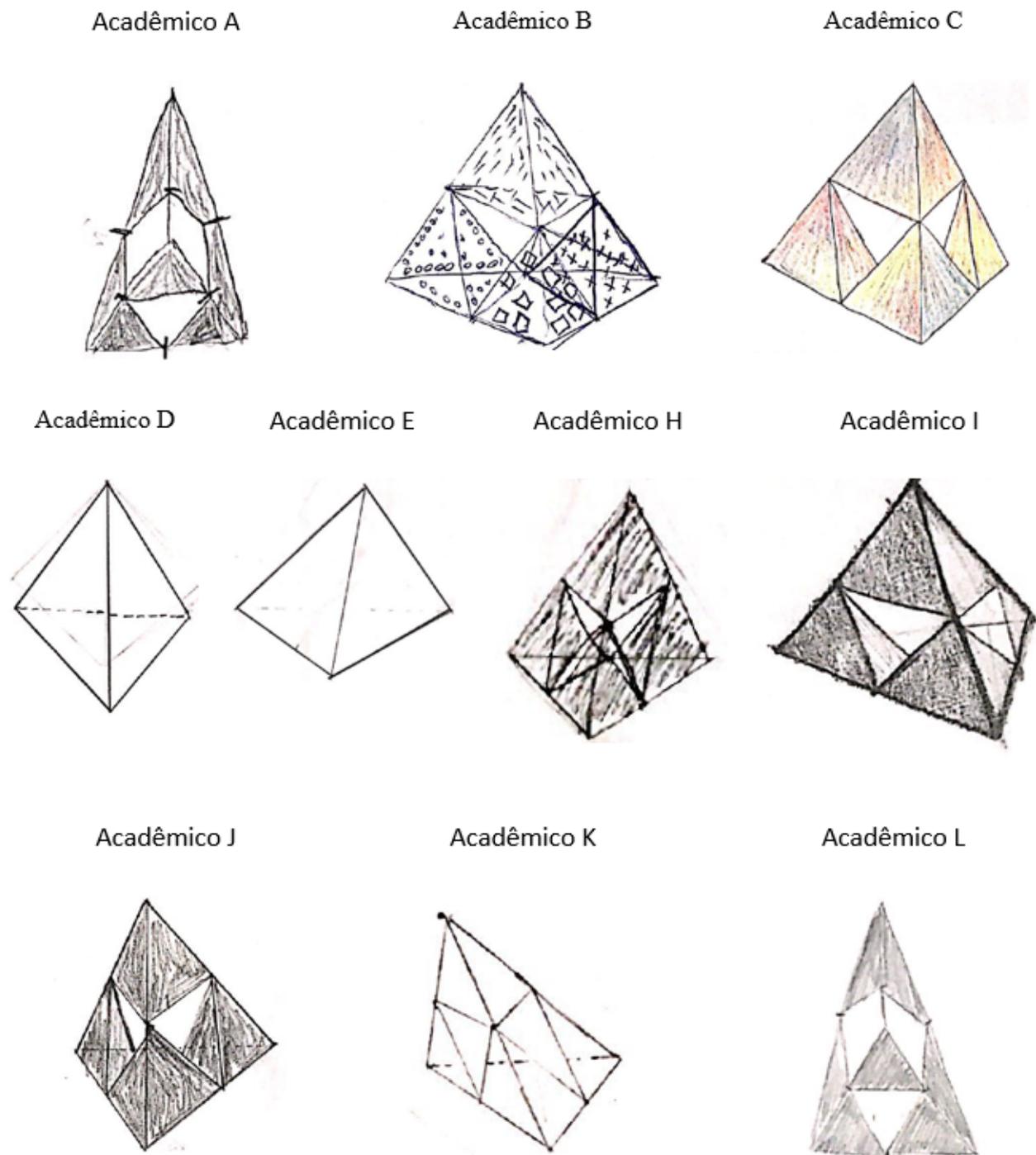
Quadro 21 – Conversão do RLN para RF na Tetraedro de Sierpinsky

RLN	RF
Primeiramente, localizamos os pontos médios de cada aresta do tetraedro e unimos, dois a dois, esses pontos médios por doze segmentos de reta, formando seis tetraedros menores e congruentes. Retiramos os dois tetraedros centrais (que formam um octaedro). Disso, resultam quatro tetraedros para, novamente, aplicarmos o mesmo processo. A cada nova iteração, a quantidade de tetraedros fica multiplicada por 4 e a medida da aresta é a metade da aresta do tetraedro anterior.	

Fonte: elaborado pelos autores.

Estipulado um tempo inicial para a realização do esboço, apenas os Acadêmicos D e E não conseguiram fazer o nível 1 do Tetraedro de Sierpinsky. Alegando que não eram bons em fazer desenhos, realizaram apenas o nível 0. Na Figura 44, temos os esboços feitos pelos acadêmicos.

Figura 44 – Esboços apresentados para o Tetraedro de Sierpinsky

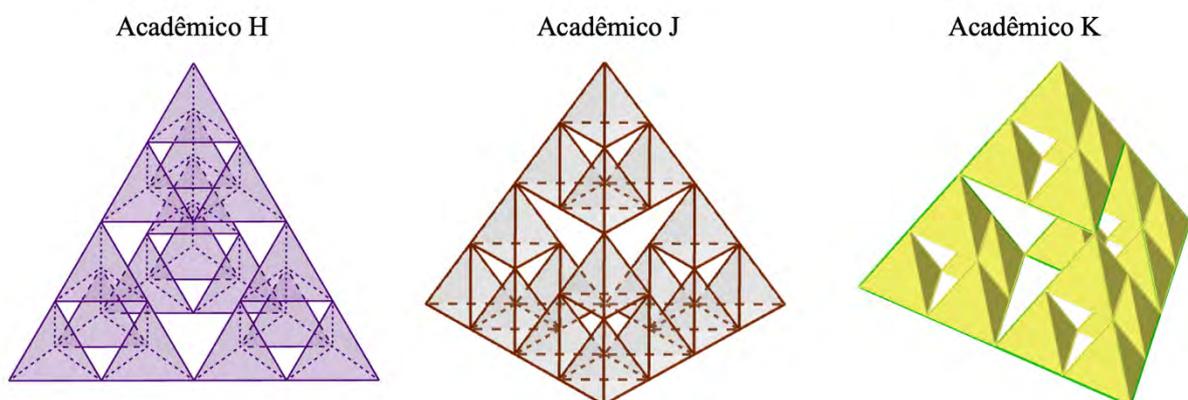


Fonte: acervo dos autores.

Após o término do tempo destinado para a atividade, apresentamos, novamente, a imagem do Tetraedro de Sierpinsky. Comparando com a Atividade 1 da Oficina 1 (esboço do fractal hexagonal de Dürer, 0% de acerto) e com a Atividade 1 da Oficina 3 (Curva de Peano, 64% de acerto), conclui-se que houve melhoria nos esboços, pois 80% conseguiram desenhar o Tetraedro de Sierpinsky da forma correta. Destacamos que os dois primeiros esboços, o do fractal hexagonal de Dürer e o da Curva de Peano, eram fractais em duas dimensões, enquanto o terceiro era em três dimensões. Pelo fato de os acadêmicos já estarem habituados com esse tipo de dinâmica e pelo resultado de 80% ter sido satisfatório, acreditamos ter conseguido estimular a imaginação e a visualização destes acadêmicos, além da realização da conversão entre o RLN e o RF, o que garante ter ocorrido a aprendizagem conceitual.

Iniciamos a Atividade 2, que envolveu a construção do Tetraedro de Sierpinsky no *GeoGebra*. A mesma sistemática utilizada na construção do fractal hexagonal de Dürer e da Curva de Peano foi aqui realizada, ou seja, fornecemos um roteiro com o passo a passo da construção. Apresentamos a construção dos níveis 0 e 1 e, por conta própria, eles já iniciaram o nível 2. Todos concluíram suas construções (RF), conforme podemos observar na Figura 45, em que são trazidas as dos acadêmicos H, J e K.

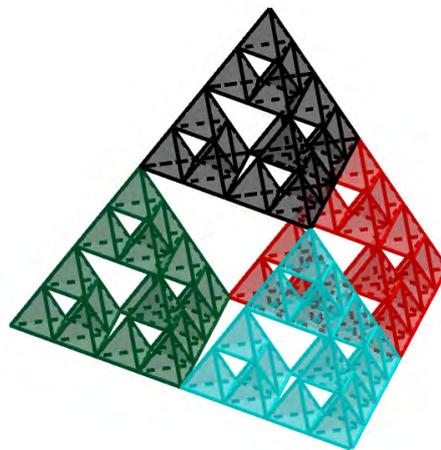
Figura 45 – Tetraedro de Sierpinsky apresentada pelos Acadêmicos H, J e K



Fonte: acervo dos autores.

Cada discente teve seu tempo para realizar a atividade no *GeoGebra*, uns mais rápidos, outros mais vagarosos. Em comparação com as outras construções solicitadas anteriormente, eles foram mais rápidos aqui, o que julgamos ser devido à familiarização com os comandos do *GeoGebra*, pelos processos iterativos e pela construção ser até o nível 2. Dessa forma, o Acadêmico L, que foi o primeiro a finalizar a construção do nível 2, perguntou se poderia continuar e fazer as iterações, com o que concordamos, chegando ao nível 3. Solicitamos que, antes de continuar, salvasse o nível 2, para fornecer o registro para o professor. Durante o tempo restante destinado à construção, o discente não conseguiu finalizar o nível 3, então combinamos que ele faria em outro horário essa construção e nos enviaria. Passados dois dias, o Acadêmico L enviou seu arquivo com a construção do nível 3, a qual trazemos a seguir, na Figura 46.

Figura 46 – Nível 3 do Tetraedro de Sierpinsky apresentada pelo Acadêmico L



Fonte: acervo dos autores.

Esse acadêmico é o mesmo que fez a construção do fractal octogonal de Dürer. Ficamos curiosos sobre as motivações que o levaram a ir além do que fora solicitado. Para tanto, realizamos alguns questionamentos, como seguem.

[professor/pesquisador] O que levou (motivou) você a realizar a construção do fractal octogonal de Dürer e o Tetraedro de Sierpinsky nível 3?

[Acadêmico L] Depois de construir o fractal hexagonal de Dürer, fiquei curioso como seria a construção diminuindo o número de lados e/ou aumen-

tando, primeiro fiz o triângulo e depois tentei fazer com oito lados. E sobre o tetraedro também estava curioso para ver como ficaria o nível 3.

[professor/pesquisador] Essa curiosidade a que você se refere foi uma curiosidade matemática de fazer os cálculos e descobrir o tamanho dos lados, no fractal octogonal de Dürer e Tetraedro de Sierpinsky, ou foi mais pela beleza e estética dos fractais?

[Acadêmico L] Acho que uma mistura dos dois, a necessidade de descobrir os cálculos e a aplicação para construir os fractais.

Com esse registro do acadêmico, percebemos que conseguimos estimular o discente em ir além do que foi desenvolvido na sala de aula. Em relação à beleza, Barbosa (2005) afirma sobre a existência dessa qualidade nas figuras fractais como motivação para o seu estudo, o que foi percebido na fala desse participante. Acreditamos ser inerente à docência incentivar o alunado a avançar além do que é estudado em sala de aula.

Passamos à Atividade 3 com as explorações geométricas a partir da construção realizada na Atividade 2. O primeiro questionamento era referente ao número de tetraedros e arestas geradas em cada nível, ou seja, a partir do RLN e RF (registro de partida), os acadêmicos deveriam observar e realizar a conversão para um RS (registro de chegada) desde o nível 0 até chegar ao nível n . Vejamos a resposta apresentada pelo Acadêmico E (Figura 47).

Figura 47 – Resposta do Acadêmico E para a primeira questão da Atividade 3 da Oficina 4

a) A partir da construção do Tetraedro de Sierpinsky, analisar e preencher a Quadro 1. Determine a quantidade de tetraedros e arestas geradas, bem como a medida delas, em cada nível, até chegar ao nível n . Salientamos que n é um número natural qualquer.

Quadro 1 - Medida do lado, número de hexágonos e área (em relação a A_0) para o Tetraedro de Sierpinsky de nível n .

	Nível 0	Nível 1	Nível 2	Nível 3	...	Nível n
Lado	l	$\frac{l}{2}$	$\frac{l}{4}$	$\frac{l}{8}$...	$\frac{l}{2^n}$
Número de arestas	6	24	96	384	...	$6 \cdot 4^n$
Número de tetraedros	1	4	16	64	...	4^n

Fonte: acervo dos autores.

Como a dinâmica adotada é semelhante à das outras oficinas, percebemos que não houve dificuldades diante desse primeiro questionamento, chegando à resposta correta. Acreditamos ser importante para a formação desses acadêmicos aliar o uso da informática, em especial a inserção do *GeoGebra*, às práticas pedagógicas. Borba e Penteado (2010) afirmam que a Educação Matemática e a Informática não devem ser consideradas de forma separadas, ou seja, as duas devem estar juntas com a finalidade de aproveitar as potencialidades que essa ligação possa gerar. Ainda, os autores relatam que a Informática precisa ser vista como uma possibilidade para a elaboração de novas práticas pedagógicas, as quais possam desencadear melhoria no processo de ensino e de aprendizagem. Corroborando essa ideia, Perrenoud (2002, p.130) explica que os *softwares* “ajudam a construir conhecimentos ou competências porque tornam acessíveis as operações ou manipulações impossíveis ou muito desencorajadoras se reduzidas ao papel e lápis”.

Dando continuidade, passamos para o segundo questionamento referente à soma das medidas das arestas do Tetraedro de Sierpinsky. Essa questão foi dividida em duas partes, a primeira é referente ao preenchimento de um quadro e a segunda é relativa à soma das medidas das arestas. Como registros de partida, tivemos o RLN e o RS e como registro de chegada, o RLN ou o RS. Vejamos na Figura 48 a resposta do Acadêmico C para a primeira parte do segundo questionamento.

Figura 48 – Resposta do Acadêmico C para a primeira parte da segunda questão da Atividade 3 da Oficina 4

b) Se você pensar em um valor para n muito elevado, ou seja, n tendendo a infinito, o que ocorre com a soma das medidas do comprimento das arestas, isto é, S_n ?

A soma das medidas dos comprimentos das arestas de um tetraedro é dada por $S = 6l$, a qual é denotada de S . Porém, a cada nível do Tetraedro de Sierpinsky se modifica a quantidade de tetraedros e a medida da aresta. Sendo assim, essa soma é dada pela multiplicação do número de tetraedros gerados em cada nível por 6 (número de arestas em cada tetraedro) e pela medida do lado l do tetraedro (que em cada nível terá um novo valor). Para melhor organização preencha o Quadro 2.

Quadro 2 – Soma das arestas do Tetraedro de Sierpinsky.

Nível	Soma das arestas
0	$S_0 = 6l = 5$
1	$S_1 = 4 \cdot \frac{6l}{2} = 25$
2	$S_2 = 16 \cdot \frac{6l}{4} = 45$
3	$S_3 = 64 \cdot \frac{6l}{8} = 85$
⋮	⋮
n	$S_n = 2^n \cdot 5$

Fonte: acervo dos autores.

Conforme esperávamos, os participantes chegaram à resposta correta. Para a segunda parte da questão, tivemos apenas um que respondeu usando a notação de limite (RS), e os demais, nove acadêmicos, optaram por escrever (RLN). Na Figura 49, apresentamos a resposta do Acadêmico B, que utilizou notação de limite, e a do Acadêmico H, que explicou sua resposta.

Figura 49 – Respostas dos Acadêmicos B e H para a segunda parte da segunda questão da Atividade 3 da Oficina 4

Acadêmico B

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n \cdot 5 = +\infty$$

Acadêmico H

Quanto maior for o valor de n , maior vai ser o valor da soma das medidas do comprimento das arestas, ou seja, irá tender ao infinito.

Fonte: acervo dos autores.

Ademais, mostramos que existe outra maneira de responder utilizando a planilha do *GeoGebra*. Apresentamos essa solução e a comparamos com as respostas obtidas pelos acadêmicos, para ilustrar que o resultado foi o mesmo, como não poderia deixar de ser.

Passamos para o terceiro questionamento, ou seja, à soma das áreas do Tetraedro de Sierpinsky. Essa questão também foi dividida em duas partes, a primeira referente ao preenchimento de um quadro e a segunda, relativa à soma das áreas. Da mesma forma que na indagação anterior, os registros de partida foram os RLN e os RS. Quanto aos de chegada, foram o RLN ou o RS. Na Figura 50, mostramos a resposta do Acadêmico A para a primeira parte do terceiro questionamento.

Figura 50 – Resposta do Acadêmico A para a primeira parte da terceira questão da Atividade 3 da Oficina 4

c) Conjecturando um valor para n muito elevado (n tendendo a infinito), o que você observa acontecer com a área total A_{t_n} ?

A área total de um tetraedro é dada por: $A_t = l^2\sqrt{3}$, (denotada por A). Para cada nível do Tetraedro de Sierpinsky, ocorre variação do número de tetraedros gerados e a medida da aresta, logo a área total (para um nível n) será o resultado da multiplicação de $\sqrt{3}$. pelo número de tetraedros de cada nível pela medida de sua aresta elevado ao quadrado. Para melhor organização preencha o Quadro 3.

Quadro 3 – Área total do Tetraedro de Sierpinsky.

Nível	Soma das áreas
0	$A_{t_0} = l^2 \sqrt{3} = A$
1	$A_{t_1} = 4 \cdot \left(\frac{l}{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3} = \frac{4l^2}{4} \sqrt{3} = A$
2	$A_{t_2} = 16 \cdot \left(\frac{l}{4}\right)^2 \cdot \sqrt{3} = \frac{16}{16} l^2 \sqrt{3} = A$
3	$A_{t_3} = 64 \cdot \left(\frac{l}{8}\right)^2 \cdot \sqrt{3} = \frac{64}{64} l^2 \sqrt{3} = A$
⋮	⋮
n	$A_{t_n} = 4^n \cdot \left(\frac{l}{2^n}\right)^2 \cdot \sqrt{3} = \frac{4^n}{2^{2n}} \cdot l^2 \sqrt{3} = A$

Fonte: acervo dos autores.

Todos os discentes chegaram à resposta correta, porém, para a segunda parte da questão, novamente um deles respondeu usando a notação de limite (RS), e os outros nove optaram por escrever (RLN). Na Figura 51, apresentamos a resposta do Acadêmico B, que utilizou notação de limite, e do Acadêmico D, que explicou sua resposta.

Figura 51 – Respostas dos Acadêmicos B e D para a segunda parte da terceira questão da Atividade 3 da Oficina 4

Acadêmico B

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} 4^n \left(\frac{1}{2^n}\right)^2 \sqrt{3}^n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{2^{2n}} \cdot \sqrt{3}^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{4^n} \sqrt{3}^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{3}^n = \sqrt{3}^n = A \end{aligned}$$

Acadêmico D

A área total vai ficar constante, ou seja permanecer a mesma.

Fonte: acervo dos autores.

Fazendo uma análise dos três primeiros questionamentos, tomamos o cuidado de mobilizar mais de um tipo de representação (RLN e RS), conforme é sugerido por Duval (2009), para que houvesse a compreensão dos objetos matemáticos. Nessas questões, houve conversões entre os diferentes tipos de registros. Ainda segundo o autor, a compreensão em Matemática requer a existência da distinção do objeto e sua representação, além da percepção de que um mesmo objeto pode ser representado por meio de outras formas. Desse modo, a elaboração conceitual requer a coordenação de diferentes registros de representação de um mesmo objeto matemático.

Finalizada a terceira questão, passamos para o quarto e último questionamento, referente ao volume do Tetraedro de Sierpinsky. Essa questão, para melhor organização, foi dividida em duas partes, a primeira é referente ao preenchimento de um quadro e a segunda é relativa à soma dos volumes. Como registros de partida, tivemos o RLN e o RS e como registro de chegada, o RLN ou o RS. Houve conversões do RLN para o RS e do RS para o RLN. Em relação aos registros mobilizados, Duval (2010, p.14) relata que “a originalidade de uma atividade matemática está na mobilização simultânea de, ao menos, dois registros de

representação ao mesmo tempo, ou na possibilidade de trocar, a todo momento, de registro de representação.” Corroborando essa ideia, Damm (2012) menciona que é somente por meio da coordenação de vários registros de representação, pelo indivíduo, que será possível a apreensão conceitual dos objetos matemáticos. Na Figura 52, apresentamos a resposta do Acadêmico I para a primeira parte do quarto questionamento.

Figura 52 – Resposta do Acadêmico I para a primeira parte da quarta questão da Atividade 3 da Oficina 4

d) Como seria o volume do Tetraedro de Sierpinsky (V_n) para valor para n muito elevado (n tendendo a infinito)?

O volume de um tetraedro é dado por: $V = \frac{l^3\sqrt{2}}{12}$. Salientamos que para cada nível do Tetraedro de Sierpinsky o que irá variar será a medida de sua aresta. Para melhor organização preencha o Quadro 4.

Quadro 4 – Volume do Tetraedro de Sierpinsky para n interações.

Nível	Soma dos volumes
0	$\frac{1^3\sqrt{2}}{12} = V$
1	$\frac{4(\frac{1}{2})^3\sqrt{2}}{12} = \frac{4 \cdot \frac{1^3\sqrt{2}}{8}}{12} = \frac{4}{8} \cdot V = \frac{1}{2}V$
2	$V_2 = \frac{16(\frac{1}{4})^3\sqrt{2}}{12} = \frac{16 \cdot \frac{1^3\sqrt{2}}{64}}{12} = \frac{1}{4} \cdot V$
3	$V_3 = \frac{64(\frac{1}{8})^3\sqrt{2}}{12} = \frac{64 \cdot \frac{1^3\sqrt{2}}{512}}{12} = \frac{1}{8} \cdot V$
⋮	⋮
n	$V_n = \frac{4^n \cdot (\frac{1}{2^n})^3\sqrt{2}}{12} = \frac{4^{2n} \cdot \frac{1^3\sqrt{2}}{2^{3n}}}{12} = \frac{1}{2^{2n}} \cdot V$

Fonte: acervo dos autores.

Novamente, os discentes chegaram à resposta correta. Acreditamos ser importante incentivar os acadêmicos a realizarem manipulações algébricas e, assim, desenvolver o pensamento algébrico que, segundo Ponte, Branco e Matos (2009), envolve o representar, o raciocinar e o resolver problemas. Dessa maneira, esse questionamento envolveu: o representar, por meio dos RS e dos RLN; o raciocinar de como seria o volume de um nível n em função de um volume inicial (V); e o resolver problemas, por meio das manipulações algébricas para obter a resposta desejada.

Para a segunda parte da questão, tivemos um resultado usando a notação de limite (RS), e os demais nove participantes escreveram (RLN). Vejamos na

Figura 53 a resposta do Acadêmico B, que utilizou a notação de limite, e a do Acadêmico C, que explicou sua resposta.

Figura 53 – Respostas dos Acadêmicos B e C para a segunda parte da quarta questão da Atividade 3 da Oficina 4

Acadêmico B

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2^m} V = 0, \text{ porque o valor mgua:}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2^m} \cdot V = V \cdot \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2^m} = V \cdot 0 = 0$$

Acadêmico C

Quanto maior o valor de m , menor será o volume do tetraedro, isto é, o volume tenderá a zero.

Fonte: acervo dos autores.

Novamente, poderíamos ter explorado o uso da planilha aqui. Sugerimos repensar para uma próxima aplicação a solicitação de seu uso, o que poderia enriquecer a discussão. Ao concluirmos essa última oficina, percebemos que os discentes já estavam habituados com a dinâmica, pois o processo foi semelhante ao das outras oficinas para fazer a generalização, não havendo dificuldades na realização das atividades propostas.

Após terminar a Oficina 4, mostramos, no Quadro 22, um resumo dos resultados das atividades propostas, assim como o número e a porcentagem de acadêmicos que as acertaram.

Quadro 22 – Quadro-resumo das atividades da Oficina 4

Atividades		Número de alunos que acertaram	% de acertos
Atividade 1 (conhecendo o Tetraedro de Sierpinsky)		8	80
Atividade 2 (construção do Tetraedro de Sierpinsky)		10	100
Atividade 3 (explorando o Tetraedro de Sierpinsky)	Item a	10	100
	Item b	10	100
	Item c	10	100
	Item d	10	100

Fonte: elaborado pelos autores.

O Quadro 22 mostra que, na Atividade 1, ocorreu 80% de acertos. Dessa forma, houve uma melhora, em relação à Atividade 1 da Oficina 1, de 80%. Questionados sobre esse avanço, os acadêmicos relataram que um possível motivo estaria na redação da definição (RLN). Eles acharam mais simples e objetiva a escrita, sendo outra razão alegada já estarem habituados a esse tipo de dinâmica de utilizar a imaginação e a visualização.

Na Atividade 2, os discentes deveriam construir os níveis 0, 1 e 2 do fractal. Percebemos que, após a construção da primeira iteração (nível 1), os acadêmicos já se motivaram e foram realizando o nível 2 sem a necessidade de o professor/pesquisador solicitar. Nessa última, os alunos levaram menor tempo para sua realização, comparado com as outras. Acreditamos que isso tenha ocorrido devido a construção ser até o nível 2 e já haver familiarização com os comandos do *GeoGebra*.

Já para as Atividade 3, conjecturamos que um dos motivos de termos obtidos 100% de acertos foi o cuidado de mobilizar pelo menos dois tipos de registros (RLN e RF) e, conseqüentemente, os tratamentos e as conversões entre eles.

De maneira geral, conseguimos inserir o uso da TD, com o uso do *GeoGebra*, porém não mais foi possível implementar o uso da planilha e da janela *CAS*, as quais foram efetivamente utilizadas na Oficina 2. O motivo desse acontecimento foi o fato de deixarmos livres, para os acadêmicos, a escolha das resoluções, quando muitos optaram em descrever sua explicação (RLN) ou usaram a notação de limite (RS).

Finalizamos com os objetivos sendo alcançados, pois construímos e exploramos as relações geométricas envolvendo o Tetraedro de Sierpinsky. Isso foi observado pelas respostas aos questionamentos apresentadas pelos discentes.

Durante as atividades propostas nas quatro oficinas, os acadêmicos passaram por vários tipos de registros. Para Duval (2009, 2012), realizar o domínio de diferentes registros de representação implica dominar as atividades cognitivas de identificar unidades significativas de cada registro, desenvolver tratamentos no domínio de cada um dos registros e converter unidades significativas de um registro de partida para um registro de chegada. Corroborando essa ideia, Damm (2012, p. 117) relata que “[...] é através das representações semióticas que se torna possível efetuar certas funções cognitivas essenciais do pensamento humano”, ou seja, as representações semióticas são indispensáveis ao pensamento matemático e à construção desse conhecimento. Com as atividades propostas e mediante as respostas apresentadas nas quatro oficinas, acreditamos ter mobilizado os registros necessários para a ocorrência da aprendizagem. O Quadro 23 apresenta uma síntese dos registros mobilizados de partida e de chegada em cada uma das atividades apresentadas nas quatro oficinas, assim como a porcentagem média de acertos.

Quadro 23 – Quadro-resumo das mobilizações das quatro oficinas

		Registro(s) mobilizado(s) de partida	Registro(s) mobilizado(s) de chegada	Média % de acertos
Oficina 1	Atividade 1	RLN	RF	0
	Atividade 2	RLN	RF	100
	Atividade 3	RLN e RF ou RLN e RS	RS ou RLN	100
	Atividade 4	RLN e RS	RS e/ou RLN	96
Oficina 2	Atividade 1	RF	RLN	69
	Atividade 2	RF e RS	RS	100
	Atividade 3	RS	RS	100
Oficina 3	Atividade 1	RLN	RF	64
	Atividade 2	RLN	RF	100
	Atividade 3	RLN e RF	RS e/ou RLN	100
Oficina 4	Atividade 1	RLN	RF	80
	Atividade 2	RLN	RF	100
	Atividade 3	RLN e RF	RS e/ou RLN	100

Fonte: elaborado pelos autores.

Como podemos observar, no Quadro 23, obtivemos uma porcentagem, com exceção da Atividade 1 da Oficina 1, entre 64% a 100%, o que consideramos um ótimo resultado, pois entendemos que houve a compreensão dos objetos matemáticos a partir de suas respectivas representações.

Em algumas das atividades, foi mobilizado apenas um tipo de registro de partida, entretanto, quanto mais registros pudermos apresentar aos discentes, melhor poderá ser a compreensão do objeto matemático, considerando que haverá tratamentos e conversões entre eles. Para Duval, é só a partir de conversões para diferentes registros que podemos distinguir o objeto matemático de sua representação, ao que ele acrescenta “[...] não é possível haver compreensão em matemática se não se distingue um objeto de sua representação” (DUVAL, 2009. p.

14). Ou seja, não podemos confundir os objetos matemáticos (um conjunto, uma função, um vetor, por exemplo), com suas representações (um desenho, uma definição, uma fórmula, por exemplo), destacando que um mesmo objeto pode ser dado por várias representações diferentes.

Por esse viés, o reconhecimento de um objeto matemático por meio de diversas representações é um motivo definitivo para que “[...] um aluno possa, por si próprio, transferir ou modificar formulações ou representações de informações durante uma resolução de problema” (DUVAL, 2010, p. 23). Dessa maneira, o trabalho pedagógico realizado, partindo desses registros, poderá proporcionar um exercício no funcionamento cognitivo do discente, considerando as diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático.

Após a finalização da Oficina 4, solicitamos aos 10 acadêmicos presentes que permanecessem mais alguns minutos, pois queríamos aplicar um questionário com quatro itens. Esse tinha o intuito de saber a opinião deles a respeito das atividades desenvolvidas durante esses cinco encontros. No quadro 24, apresentamos o primeiro item, tendo todos marcado a alternativa sim.

Quadro 24 – Pergunta e respostas ao primeiro questionamento da pesquisa de opinião

Pergunta	Respostas
1) As expectativas que você tinha ao se inscrever no curso de Geometria Fractal foram atendidas? <input type="checkbox"/> sim <input type="checkbox"/> não <input type="checkbox"/> em parte Indique, por favor, o que faltou?	Quatro alunos escreveram o seguinte no espaço o que faltou? <i>Faltou a presença de outros acadêmicos do curso de licenciatura em Matemática. (Acadêmico B).</i> <i>Não faltou nada, na verdade as expectativas foram mais que atendidas. Gostei muito mesmo! (Acadêmico C).</i> <i>Poderia ter tido mais construções no GeoGebra. (Acadêmico E).</i> <i>Poderia ter mais tempo, para fazermos algumas construções diferentes. (Acadêmico J).</i>

Fonte: acervo dos autores.

O registro escrito do Acadêmico B é interessante, pois tivemos 23 interessados no Projeto de Ensino e, desses, 16 efetivaram a inscrição e 12 (75%) finalizaram o Projeto de Ensino, logo não foram preenchidas nove vagas. Não entraremos no mérito do porquê de os interessados não terem participado ou desistido, pois cada um, com certeza, teve seus motivos. Só podemos conjecturar que, se houvesse mais acadêmicos participando, teríamos uma maior diversidade de respostas para as oficinas, e quem sabe outras discussões e análises ocorreriam.

O Acadêmico C achou tudo muito interessante. Já o Acadêmico E relatou que gostaria de ter havido mais construções no *GeoGebra*. Em conversa com esse aluno, ele relatou que gostaria de ter construído outros fractais. Porém, cabe destacar que nossa intenção quando elaboramos as oficinas foi escolher construções pouco ou ainda não exploradas, selecionadas mediante a análise dos mapeamentos realizados para a pesquisa.

Em relação à escrita do Acadêmico J, quando registrou “construções diferentes”, em entrevista relatou que poderia ser feita a construção de outros níveis das figuras propostas. Porém não foi nossa proposta criar muitos níveis, pois os processos são iterativos e algumas imagens poderiam demorar muito para serem produzidas. Acreditamos que fornecemos as ferramentas necessárias para esses discentes irem além de nossas propostas de construções. Um exemplo disso foi sobre o fractal octogonal de Dürer e o nível 3 do Tetraedro de Sierpinsky realizado pelo Acadêmico L.

Já a segunda questão foi dividida em três partes. No Quadro 25, apresentamos as perguntas e algumas respostas (houve muitas respostas semelhantes, então as agrupamos em cinco grupos).

Quadro 25 – Pergunta e respostas ao segundo questionamento da pesquisa de opinião

Pergunta	Respostas
<p>2) Em relação às atividades desenvolvidas durante o curso:</p> <p>a) Do que mais você gostou?</p>	<p><i>Das construções no GeoGebra, por saber manusear pouco o GeoGebra foi um grande aprendizado. (Acadêmico A).</i></p> <p><i>Das expressões que elaboramos. Encontrar os termos genéricos, utilizar a noção de limite, para resolver as questões. (Acadêmico B).</i></p> <p><i>Eu gostei da Oficina 4 por que parece que ficou mais simples de fazer. (Acadêmico D).</i></p> <p><i>As construções feitas no GeoGebra, principalmente a Oficina 3. (Acadêmico I).</i></p> <p><i>As construções no GeoGebra. Em especial da primeira oficina. (Acadêmico L).</i></p>
<p>b) Do que menos você gostou?</p>	<p><i>Da oficina 3 por travar o computador. (Acadêmico A).</i></p> <p><i>Não houve algo que poderia dizer que não gostei. (Acadêmico B).</i></p> <p><i>Acho que todas as oficinas foram importantes. (Acadêmico D).</i></p> <p><i>Não houve algo que não tenha gostado. (Acadêmico I).</i></p> <p><i>Gostei de todas as atividades propostas. (Acadêmico L)</i></p>
<p>Justifique sua resposta.</p>	<p><i>O computador travou no momento do término da construção. (Acadêmico A).</i></p> <p><i>Gostei de todo o curso, e poderíamos ter algo de fractais nas ementas das disciplinas. (Acadêmico B).</i></p> <p><i>Eu gostei do curso por que a cada dia foram propostas desafiadoras. (Acadêmico D).</i></p> <p><i>Gostei mais das construções, pois através delas, pode-se ver de forma prática como um fractal é formado, o que para mim facilitou o aprendizado, além de nós dar a oportunidade de utilizar o GeoGebra. (Acadêmico I).</i></p> <p><i>Ao construir os fractais no GeoGebra tornou-se mais fácil a visualização. (Acadêmico L).</i></p>

Fonte: acervo dos autores.

Em relação àquilo de que mais gostaram (todos responderam) e, pelos relatos apresentados, sentimos ter motivado esses discentes, pois foi um conteúdo do qual eles não tinham conhecimento e além disso puderam realizar construções no *GeoGebra*. Também, constatamos que as Oficinas 1 e 3 foram as mais apreciadas. Acreditamos que a Oficina 4, mesmo desenvolvendo construções no *GeoGebra*, não desafiou os discentes com novos comandos, apesar de ter envolvido a janela 3D.

Já para a segunda parte do questionamento: do que menos gostou, apenas cinco acadêmicos responderam. O Acadêmico A (pois os demais apenas disseram que gostaram das oficinas) relatou uma dificuldade relacionada à sua construção, ao “travar” o computador no final do processo. O “travar” foi no sentido de o computador deixar de funcionar corretamente, causando lentidão, ou mesmo o fechamento do *software* que estava sendo utilizado. Quando pensamos na construção de cada fractal, levamos em conta esse possível problema e foi um do motivo pelo qual não foi solicitada a construção de outros níveis.

Para finalizar a terceira parte do questionamento, os cinco discentes que responderam a segunda parte também tiveram o cuidado de justificar. O Acadêmico B destacou a importância da temática fractal estar inserida nas ementas das disciplinas. Isso vem ao encontro do objetivo geral desta pesquisa, que é a possibilidade de inserção de noções de Geometria Fractal nos cursos de licenciatura em Matemática com o uso das TD. Os Acadêmicos D e I, pelas escritas, justificaram o que mais gostaram, a saber, as propostas e as construções. O Acadêmico L destacou a importância da visualização a partir do *GeoGebra*. Esse foi nosso intuito quando pensamos na produção dos fractais no *GeoGebra*, isto é, facilitar o entendimento das explorações a partir da visualização. Segundo Goldenberg (1998, p. 37), os tipos de visualização de que os discentes necessitam,

[...] tanto em contextos matemáticos como noutros, dizem respeito à capacidade de criar, manipular e “ler” imagens mentais de aspectos comuns a realidade; visualizar informação espacial e quantitativa, e interpretar visualmente a informação que lhe seja apresentada; rever e analisar passos anteriormente dados como objetos que podiam tocar e desenhar; e interpretar ou fazer aparecer, como por magia imagens de objetos ou ideias que nunca foram vistos.

Uma das razões de ter inserido e investido na implementação da visualização nas Oficinas 1, 3 e 4 está associada às habilidades mentais e visuais que os acadêmicos podem vir a desenvolver e adquirir a partir desse tipo de atividade.

Como se trata de uma pesquisa de cunho qualitativo, Bogdan e Biklen (1994) ressaltam que pode ocorrer o surgimento de novas interpretações ou mesmo novas questões de pesquisa, sobre as quais não se havia pensado inicialmente. Nesse caso, surgiu a questão da exploração da visualização a partir da construção mental, dados o RLN e as explorações a partir da visualização da construção realizada no *GeoGebra*.

O terceiro questionamento envolveu saber a importância desse tipo de curso para a formação acadêmica dos discentes. Todos responderam sim, ou seja, é importante para sua formação acadêmica. Houve seis acadêmicos que justificaram suas respostas, porém, como elas foram semelhantes, as agrupamos em três justificativas, representadas pelos Acadêmicos D, J e K. No Quadro 26, apresentamos a pergunta e as três respostas.

Quadro 26 – Pergunta e respostas ao terceiro questionamento da pesquisa de opinião

Pergunta	Respostas
3) Você considera importante cursos como este, ministrado para complementar sua formação acadêmica, visto que o conteúdo nele abordado não está contemplado no Projeto Pedagógico do Curso.	<i>Achei importante para a nossa formação por que ao utilizar softwares como o GeoGebra chama mais a atenção dos alunos. (Acadêmico D).</i>
() sim	<i>Sempre acho importante fazer cursos além das aulas normais, pois acho de grande importância obter um pouco de conhecimento nos mais variados assuntos que se relacionem com a formação, que sejam de grande valia para nós futuramente. (Acadêmico J).</i>
() não	<i>Pois, propicia a interação do acadêmico com uma geometria diferente da Euclidiana, mostrando mais uma ferramenta de ensino que o acadêmico irá incorporar à sua formação. (Acadêmico K).</i>
() em parte	
Justifique sua resposta.	

Fonte: acervo dos autores.

Observamos pelas respostas dos acadêmicos que eles consideram importante essa oferta de curso, mesmo ocorrendo fora do horário das aulas regulares. Consideramos que é a partir desse conhecimento apresentado na graduação que eles poderão levar essas experiências para suas futuras práticas pedagógicas na Educação Básica. Além disso, como destaca o Acadêmico K, estamos apresentando outro tipo de geometria, que não é estudada atualmente durante a graduação.

A formação de professores para atuarem em diferentes níveis de ensino da Educação Básica, segundo relata Mizukami, (2008, p. 216), é caracterizada por um “momento formal em que processos de aprender a ensinar e aprender a ser professor começam a ser construídos de forma mais sistemática, fundamentada e contextualizada”. Colaborando com essa ideia, Imbernón (2011, p. 68) relata sobre a possibilidade “de uma bagagem sólida nos âmbitos científicos, cultural, contextual, psicopedagógico e pessoal que deve capacitar o futuro professor ou professora a assumir a tarefa educativa em toda sua complexidade”. Acreditamos que cursos como esse (sobre Geometria Fractal), ofertados para acadêmicos, qualificam sua formação inicial e quem sabe suas aulas na Educação Básica.

A quarta e última pergunta foi referente à possibilidade de se trabalhar a Geometria Fractal na Educação Básica. Todos responderam afirmativamente, ou seja, é possível e importante desenvolver esse tipo de conteúdo na Educação Básica. Da mesma forma que as demais perguntas, por haver respostas parecidas, agrupamo-las em quatro respostas, que são apresentadas juntamente com a pergunta no Quadro 27.

Quadro 27 – Pergunta e respostas ao quarto questionamento da pesquisa de opinião

Pergunta	Respostas
4) Você acha possível e importante trabalhar a Geometria Fractal na Educação Básica?	<i>É possível sim e importante também, os alunos aprenderam, mas tem que se trabalhar de uma forma mais simples, procurando sempre semelhanças com o cotidiano dos alunos. (Acadêmico C).</i>
() sim	<i>É importante, pois durante a construção dos desenhos é possível trabalhar diversos conceitos ligados à geometria. (Acadêmico E).</i>
() não	<i>Por ser algo atrativo e que podemos aprender e visualizar o que estamos fazendo. (Acadêmico H).</i>
() em parte	
Justifique sua resposta.	<i>Sim, porque a Geometria Fractal está relacionada a outras geometrias e através dela podemos adquirir uma melhor compreensão das outras. (Acadêmico I).</i>

Fonte: acervo dos autores.

As respostas dos acadêmicos vêm ao encontro das justificativas apresentadas por Barbosa (2005). Além disso, reforçamos essa necessidade de trabalhar a Geometria Fractal na Educação Básica, apoiados por Sallum (2005, p. 1), que explica:

a introdução de fractais no ensino, além de satisfazer a curiosidade de quantos já ouviam falar nele, propicia a oportunidade de trabalhar com processos iterativos, escrever formulas gerais, criar algoritmos, calcular áreas e perímetros de figuras com complexidade crescente, introduzindo uma ideia intuitiva de limite e é um excelente tópico para aplicação de progressões geométricas e estímulo ao uso de tabelas.

Pelos relatos dos alunos, em especial o do Acadêmico C, as oficinas desenvolvidas não tiveram ligação direta com o cotidiano. Não havíamos percebido esse detalhe, pois tentamos desenvolver junto com a Geometria Fractal a exploração de entes geométricos envolvidos. Também, por meio de entrevista, questio-

namos o Acadêmico C sobre o termo “forma mais simples”. Ele relatou que usou essa expressão no sentido de não aprofundar a construção dos fractais, ou seja, fazer a construção nos níveis 0, 1 e 2.

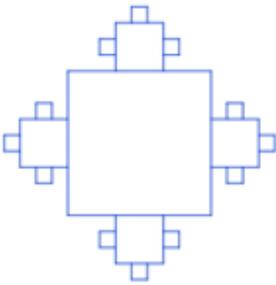
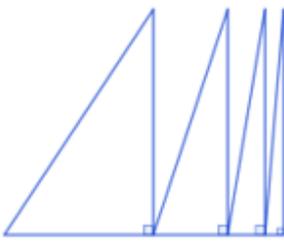
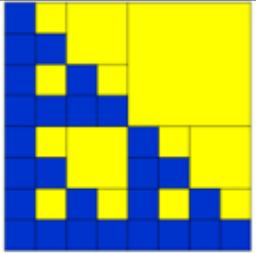
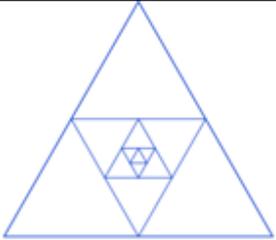
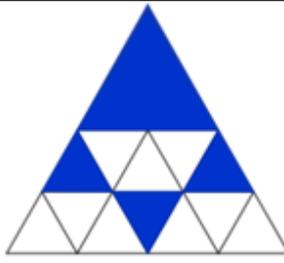
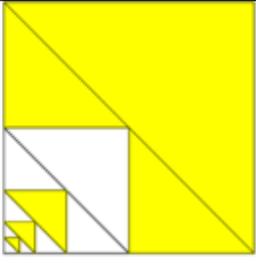
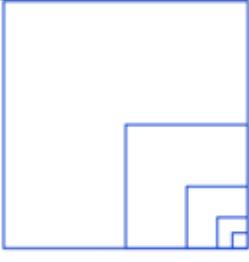
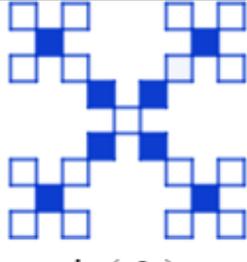
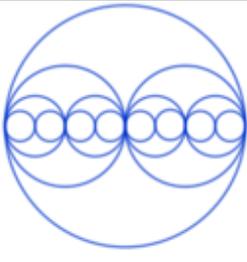
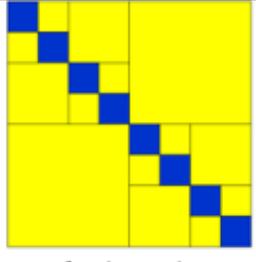
5.6 PÓS-TESTE: VERIFICANDO A APRENDIZAGEM

Da mesma forma que aplicamos um pré-teste, no início das atividades, para verificar o conhecimento em relação à temática abordada, também empregamos um pós-teste, com a intencionalidade de verificar se houve ou não aprendizagem. Bell, Grossen e Perret-Clermont (1985) consideram importante determinar o nível de conhecimento que um sujeito possui acerca de um determinado conteúdo para garantir que ele compreenda a tarefa proposta e que tenha um papel ativo durante a discussão e a confrontação.

Para tanto, replicamos a Atividade 1 da Oficina 2, aproximadamente seis meses após o término das oficinas, para o mesmo grupo que a realizaram, e verificamos se houve melhora ou não na identificação das imagens que são fractais e a respectiva justificativa. Para a realização do pós-teste, escolhi um dia da semana em que todos estivessem na instituição e os convidei a participar.

Responderam o pré-teste os mesmos 11 discentes que estavam presentes na Oficina 2. Naquele dia não estava presente o Acadêmico H. No Quadro 28, apresentamos essas figuras e o respectivo número de marcações que cada uma recebeu.

Quadro 28 – Figuras geométricas (pós-teste)

 <p>a. (6)</p>	 <p>b. (11)</p>	 <p>c. (0)</p>	 <p>d. (10)</p>
 <p>e. (11)</p>	 <p>f. (0)</p>	 <p>g. (9)</p>	 <p>h. (1)</p>
 <p>i. (11)</p>	 <p>j. (0)</p>	 <p>k. (11)</p>	 <p>l. (10)</p>

Fonte: acervo dos autores.

Tivemos três acadêmicos (B, G e I) que selecionaram de forma correta todas as imagens que são fractais, o que não havia ocorrido no pré-teste, e dois participantes, E e L, que não selecionaram nenhuma imagem que não fosse fractal, mas deixaram de selecionar algumas que eram. Os demais discentes tiveram alguma marcação em imagens que não eram fractais.

Para podermos comparar se houve ou não melhora em relação aos acertos e erros, elaboramos o Quadro 29, em que apresentamos o número de marcações que cada imagem teve na Atividade 1 da Oficina 2 e no pós-teste, assim como uma comparação em forma de percentual aproximado.

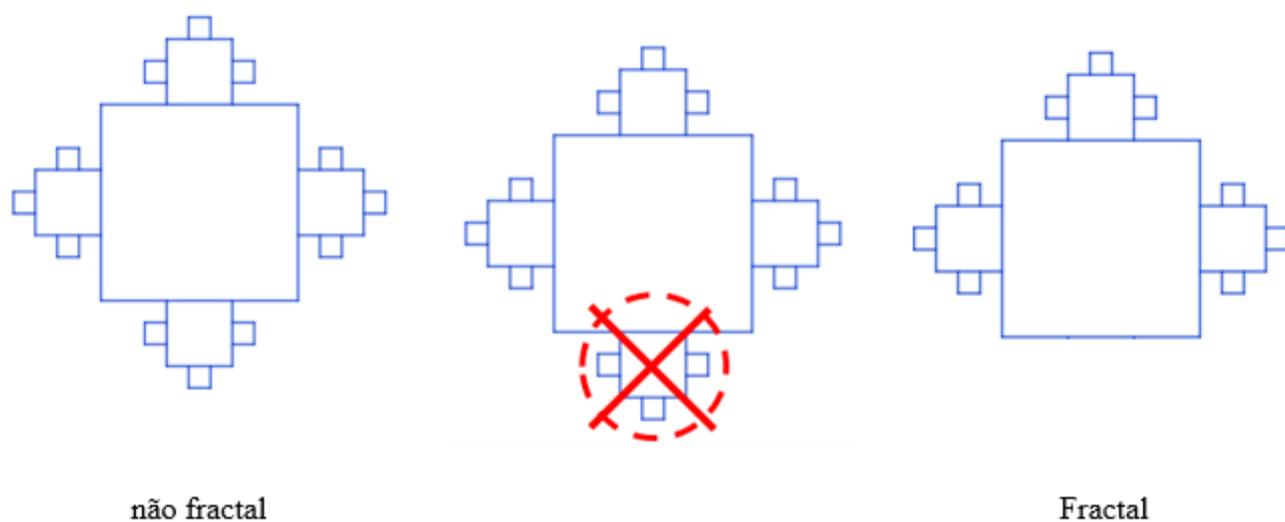
Quadro 29 – Figuras geométricas (pós-teste) e suas respectivas marcações

Imagem	Número de marcações de cada imagem		Comparação (% aproximada)
	Atividade 1 Oficina 2	Pós-teste	
(a)	8	6	Houve redução de erro em 18%.
(b)	10	11	Houve aumento de acerto em 9%.
(c)	0	0	Se manteve.
(d)	7	10	Houve aumento de acerto em 27%.
(e)	8	11	Houve aumento de acerto em 27%.
(f)	0	0	Se manteve.
(g)	8	9	Houve aumento de acerto em 9%.
(h)	9	1	Houve redução de erro em 73%.
(i)	7	11	Houve aumento de acerto em 36%.
(j)	5	0	Houve redução de erro em 45%.
(k)	9	11	Houve aumento de acerto em 18%.
(l)	5	10	Houve aumento de acerto em 45%.

Fonte: elaborado pelos autores.

Observamos que houve redução na escolha das imagens (a), (h) e (j), logo, os discentes demonstram estar melhor identificando as imagens que são fractais. Porém, esses ainda escolheram a imagem (a) como sendo um fractal. Em relação a ela, questionamos os alunos que a marcaram e eles responderam que a selecionaram por acharem ser fractal. Esses participantes não perceberam que ela tem uma parte a mais, que a torna um não fractal, conforme se pode ver na Figura 54.

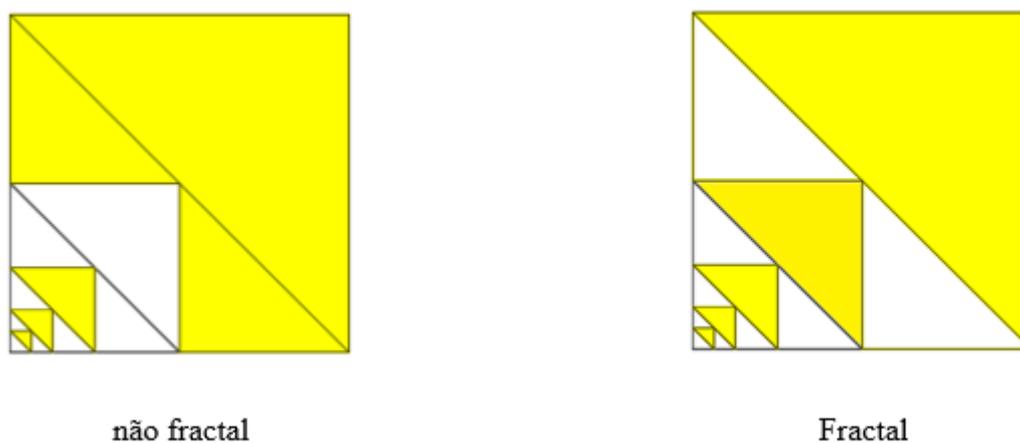
Figura 54 – Imagem (a) não fractal e imagem (a) transformada em fractal



Fonte: elaborada pelos autores.

Quanto ao Acadêmico C, ele marcou a imagem (h). Questionado sobre essa resposta, relatou que se confundiu com a cor. Na Figura 55, apresentamos essa imagem não fractal e ela transformada em fractal, apenas com a modificação da coloração.

Figura 55 – Imagem (h) não fractal e imagem (h) transformada em fractal



Fonte: elaborada pelos autores.

Após a marcação das imagens, os participantes teriam que justificar, de forma geral, o porquê de suas escolhas fractais. A seguir, trazemos as justificativas apresentadas pelos acadêmicos.

Escolhi as imagens por apresentarem padrões e semelhanças. (Acadêmico A).

Há um padrão nas repetições (iterações). (Acadêmico B).

Fractal é uma estrutura geométrica, que a cada nível, diminui (ou pela metade, ou terça parte, ...), sendo cada vez menor. (Acadêmico C).

São os que lembram uma sequência. (Acadêmico D).

Acredito que as figuras geométricas marcadas são fractais pois são imagens que apresentam repetições de padrões. (Acadêmico E).

São fractais pois ao analisarmos as imagens percebemos padrões e repetições (Acadêmico F).

Há uma repetição em um novo nível da regra usada no último nível, sem acréscimo de alguma coisa. (Acadêmico G).

São fractais, pois em cada figura existe uma lógica na construção de sua sequência, em que há uma razão na montagem de cada sequência do fractal. (Acadêmico I).

São imagem que seguem certa razão e padrão para sua construção. (Acadêmico J).

São fractais, pois formam sequências de figuras cada vez menores, seguindo uma regra de construção. (Acadêmico K).

As imagens se repetem seguindo um padrão e uma razão de redução. (Acadêmico L).

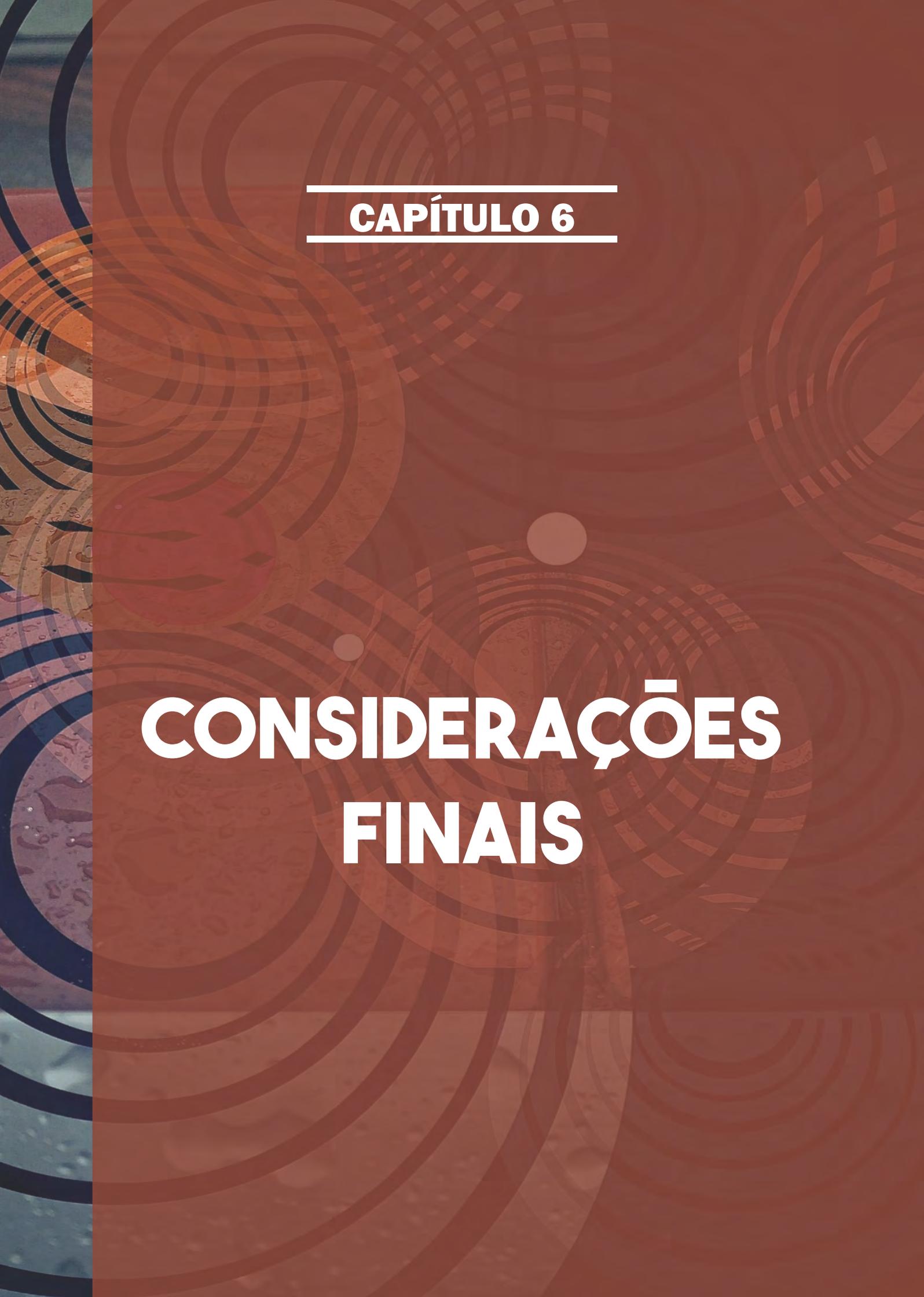
Mediante as respostas apresentada para a justificativa e as marcações das imagens que são fractais, podemos concluir que houve a compreensão do que é um fractal, mesmo depois de seis meses do término do Projeto de Ensino. Isso mostra consistência na aprendizagem desses indivíduos.

Acreditamos que os registros de representação foram importantes para mobilização e expressão dos pensamentos matemáticos construídos durante as oficinas, pois, para Duval (2012, p. 13), “o desenvolvimento das representações semióticas foi a condição essencial para a evolução do pensamento matemático”.

Comparando com o pré-teste, em que inicialmente apenas 5 acadêmicos (B, C, G, H e K) haviam ouvido falar sobre fractal, foi um avanço comprovar que todos possuem uma ideia e um conceito sobre o referido assunto. Cabe des-

tacar que, na maioria das escritas, apareceram as palavras: padrões, repetições, sequências e, dessa forma, percebemos que eles entenderam o conceito de fractal e suas respostas se aproximam muito das definições apresentadas Stewart (1996), Barbosa (2005) e Feder (1988).

Portanto, com a finalização do pós-teste, podemos concluir que, para esse grupo de acadêmicos, conseguimos introduzir o conceito de fractal de forma satisfatória. Como eles são futuros professores, julgamos ser importante desenvolver outros conteúdos que não estão nas ementas das disciplinas. Além disso, também estimulamos e instrumentalizamos esses alunos para o uso de TD para suas futuras práticas pedagógicas.



CAPÍTULO 6

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste capítulo, apresentamos as principais considerações e resultados encontrados. Como educadores, sempre estamos refletindo sobre nosso fazer pedagógico, de forma a buscar novas ferramentas e referências teóricas para a construção da aprendizagem, como Freire (1996, p. 52) define “[...] ensinar não é transferir conhecimento, mas criar possibilidades para sua própria produção ou sua construção.”

Acreditamos que, com a aplicação do Projeto de Ensino (Geometria Fractal na formação docente: da teoria à prática), por meio de uma sequência de atividades, foi possível apresentar aos acadêmicos participantes uma outra Geometria, que não consta no PPC. Por meio das respostas apresentadas pelos discentes e análise dos RRS, acreditamos que houve aprendizagem.

Justificamos essa necessidade de inserção no PPC, por pensar que é importante o ensino de geometrias não euclidianas no Ensino Superior, uma vez que Leivas (2005/2006) ressalta que esse tipo de geometria pode ser útil para a obtenção de uma cultura geométrica pelo professor. É fundamental mostrar aos discentes a existência de outras geometrias além da Geometria Euclidiana, não sendo ela a única possível e praticável no mundo que nos cerca, uma vez que existem problemas que podem ser resolvidos pelas geometrias não euclidianas e não na euclidiana, como as navegações marítima e aérea. Além disso, por meio do estudo das geometrias não euclidianas, pode-se incentivar o uso das TD.

A sequência de atividades, apresentada nas oficinas, não deve ser única e imutável, pelo contrário, servir apenas de sugestões a serem desenvolvidas, pois cada sala de aula tem a sua característica e particularidade. Nesse caso, após o término da oficina, percebemos que poderia ter explorado mais o uso de duas ferramentas do *GeoGebra*: a planilha e a janela *CAS*. Portanto, para uma próxima aplicação das oficinas, recomendamos repensar as atividades e respostas do 6º questionamento da Atividade 3 da Oficina 1, do 2º questionamento da Atividade 3 da Oficina 3 e do 2º e 4º questionamentos da Atividade 3 da oficina 4, já direcionando o discente a trabalhar com essas duas ferramentas.

Quem sabe, agora com o conhecimento da Geometria Fractal, os acadêmicos, em suas futuras práticas pedagógicas, quer no estágio supervisionado quer depois de formados, possam aplicar esse conhecimento na Educação Básica, pois “[...] a experiência como aluno, não apenas nos cursos de formação docente, mas ao longo de toda a sua trajetória escolar, é constitutiva do papel que exercerá futuramente como docente”. (BRASIL, 2002, p. 30).

O professor deve estar constantemente repensando seu fazer pedagógico, em formas de estimular a aprendizagem dos discentes, e porque não utilizar as TD como recursos metodológicos despertando o interesse por essa abordagem. Consideramos importante apresentar e incentivar o uso de *softwares* aos futuros professores, pois é a partir de seu conhecimento que irão construir sua prática pedagógica.

Para esta pesquisa, optamos pelo uso do *GeoGebra* como um recurso para facilitar a visualização das construções obtidas de forma dinâmica na tela do computador. Segundo Leivas (2009, p. 22), a visualização é “[...] um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas geométricos ou analíticos.” No decorrer da pesquisa, observamos que surgiu mais uma questão de investigação, a qual não estava inclusa nos objetivos da pesquisa, pelo menos explicitamente. Essa foi a exploração da visualização a partir da construção mental, dado o RLN e a construção realizada no *GeoGebra*. Sobre essa última, destacamos o relato do Acadêmico G, o qual fez uma conjectura a partir da visualização da Curva de Peano sobre a área da região apresentada na tela. Disse o estudante ser a área de um quadrado de lado L , o que, posteriormente, foi comprovado. Destacamos que isso só foi possível devido à utilização do controle deslizante do *software* de GD, pois se a curva fosse construída de forma estática, pensamos que não teria sido possível a realização do que havia sido conjecturado.

Outro ponto que destacamos, desde o início deste trabalho, foi para apresentar noções de Geometria Fractal aos acadêmicos do curso de licenciatura em Matemática do IFFar – Campus Alegrete, tendo como questão norteadora da pesquisa: como investigar possibilidades de inserção de noções de Geometria Fractal nos cursos de licenciatura em Matemática do IFFar com a utilização das TD?

Salientamos que, para responder a essa pergunta, o processo de ensino teve ênfase no uso da TD e o processo de aprendizagem foi analisado por meio dos RRS de Duval (2009; 2010), Machado (2010), Maggio e Nehring (2012), Damm (2012), Henriques e Almouloud (2016), entre outros, guiados a partir de uma sequência de atividades organizada em oficinas. Quanto à pergunta que norteou a pesquisa, não tivemos dúvida de que a resposta a ela é afirmativa, ou seja, é possível inserir noções de Geometria Fractal, com o uso das TD, para a população alvo envolvida no processo. Pelas situações apresentadas no Capítulo 5, percebemos que também foi possível motivá-los para a realização das atividades e construção do próprio conhecimento. Como comprovação, destacamos o fato do Acadêmico L, que foi além do solicitado nas atividades durante as oficinas e apresentou o fractal octogonal de Dürer até nível 3, o fractal hexagonal de Dürer para o nível 4 e o Tetraedro de Sierpinsky para o nível 3.

Retomamos o objetivo geral da pesquisa: “investigar possibilidades de inserção de noções de Geometria Fractal nos cursos de licenciatura em Matemática do IFFar com o uso das TD” e apresentamos, a seguir, um recorte dos objetivos específicos originados a partir dele:

- a) explorar o ensino e a aprendizagem da Geometria Fractal, por meio de TD e dos RRS;
- b) planejar uma sequência de atividades com base em conhecimentos algébricos e geométricos (a partir da Geometria Fractal) que incluam o uso das TD;

c) executar e analisar uma sequência de atividades, com um grupo de alunos do curso de licenciatura em Matemática do IFFar – Campus Alegrete.

Com o intuito de responder cada um dos objetivos específicos, passamos para a sua análise, individualmente. Para os dois primeiros, foram planejadas atividades envolvendo o estudo da Geometria Fractal, com o uso da TD (ensino) e, ao mesmo tempo, pensado na forma de coleta dos RRS (aprendizagem). Salientamos a importância dos RRS, pois eles não são somente um sistema de comunicação, mas também uma forma de organização de informações acerca do objeto matemático representado. Segundo Duval (2009), uma das dificuldades na compreensão de conceitos matemáticos está na dúvida que se possa ter entre a relação do objeto matemático e sua representação, sendo que a compreensão conceitual do objeto deve passar pelo entendimento dos seus diferentes registros de representação e das relações entre eles.

Quanto ao objetivo (c), foram executadas e analisadas as atividades aplicadas em forma de quatro oficinas e os resultados analisados e discutidos no Capítulo 5. Dessa forma, finalizamos com a certeza de que todos os objetivos específicos foram contemplados, e que, mediante as análises das respostas apresentadas pelos acadêmicos durante as oficinas e pós-teste, temos a comprovação de que foi possível inserir noções de Geometria Fractal com o uso de uma TD para este grupo focal.

Esperamos que essas reflexões apresentadas, bem como as observações realizadas possam contribuir para a inserção da Geometria Fractal na Educação Básica e a utilização dos RRS. Concluimos com a expectativa de que a pesquisa seja uma oportunidade para estudantes e professores pensarem sobre a temática abordada e sua possibilidade de desenvolvimento na sala de aula com o uso das TD.

REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Maria Elizabeth Bianconcini. Tecnologias Digitais na Educação: o futuro é hoje. In: ENCONTRO DE EDUCAÇÃO E TECNOLOGIAS DE FORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO, 5., 2007, São Paulo. **Anais eletrônicos...** São Paulo: Universidade Estácio de Sá, 2007.

ALMEIDA, Maria Elizabeth de. **ProInfo: Informática e Formação de Professores**. v. 1. Secretaria de Educação à Distância. Brasília: Ministério da Educação, 2000.

ALVES, Célia Maria Felipe Santos Jordão. **Fractais: Conceitos Básicos, Representações Gráficas e Aplicações ao Ensino não Universitário**. Lisboa: Universidade de Lisboa, 2007.

ANDRÉ, Regina Celi de Melo. Dificuldades na conversão de problemas envolvendo equação e a relação com o contrato didático. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2011, Recife. **Anais...** Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 2011. p. 01-12.

ARCAVI, Abraham. The role of visual representation in the learning of mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, v.52, n.2, p. 215-241, 2003.

BACICH, Lilian; NETO, Adolfo Tanzi; TREVISANI, Fernando de Melo. **Ensino híbrido: personalização e tecnologia na educação**. Porto Alegre: Penso, 2015.

BAIRRAL, Marcelo Almeida. **Tecnologias da Informação e Comunicação na formação e educação matemática**. v. 1. Seropédica: EDUR, 2009.

BARBOSA, Ruy Madsen. **Descobrendo a Geometria Fractal para a sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

BELL, Nancy; GROSSEN, Michèle; PERRET-CLERMONT, Anne-Nelly. Sociocognitive conflict and intellectual growth. In: BERKOWTZ, Marvin. **Peer Conflict and Psychological Growth** (New Directions for Child Development). San Francisco: Jossey-Bass, 1985. p. 41-54.

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari. **Investigação qualitativa em educação**. Portugal: Porto Editora, 1994.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

BORBA, Marcelo de Carvalho; SILVA, Ricardo Scucuglia Rodrigues da; GADANIDIS, George. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática: Sala de aula e internet em movimento**. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Conselho Pleno. Parecer Nº 09/2001, de 08 de maio de 2001. Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores da Educação Básica, em nível superior, curso de licenciatura, de graduação plena. **Diário Oficial da União**, Brasília, DF, 8 set. 2002. Seção 1, p. 31.

BRASIL. **Projeto Pedagógico do Curso de Licenciatura em Matemática**. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha – Campus Alegrete. Alegrete, 2014.

BRASIL. Resolução CONSUP nº 046/2016, de 26 de julho de 2016. Aprova o Regulamento de Ações, Programas e Projetos de Pesquisa, Ensino, Extensão, Desenvolvimento Institucional e Inovação do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha. **Conselho Superior**, Santa Maria, 26 jul. 2016.

BREUNIG, Raquel Thaís; NEHRING, Cátia Maria; POZZOBON, Marta Cristina Cesar. Registros de Representação Algébricos: proposições de alunos do primeiro ano do ensino médio. In: CONGRESSO INTERNACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., 2010, Canoas. **Anais...** Canoas: Universidade Luterana do Brasil, 2010. p. 1-10.

CAPRA, Fritjof. **A teia da vida: uma nova compreensão científica dos sistemas vivos**. Tradução de Newton Roberval Eicheberg. São Paulo: Cultrix, 2006.

CIFUENTES, José Carlos. Do conhecimento matemático à educação matemática: uma “odisséia espiritual”. In: CLARETO, Sônia Maria; DETONI, Adlai Ralph; PAULO, Rosa Monteiro (org). **Filosofia, matemática e educação matemática: compreensões dialogadas**. Juiz de Fora: Ed. UFJF, 2010. p. 13-32.

COELHO, João Batista. **Geometria Fractal: Um olhar sobre a necessidade de inclusão na estrutura curricular do Ensino Médio**. 2015. 80 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Federal do Tocantins, Palmas, 2015.

DALPIAZ, Marcos Roberto. **Um estudo sobre fractais:** origem e proposta didática para aplicação em aula. 2016. 74 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2016.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática:** da teoria à prática. 23. ed. Campinas: Papirus, 2012.

DAMM, Regina Flemming. Registros de Representação. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara et al. **Educação Matemática:** uma introdução. 3. ed. rev. São Paulo: EDUC, 2012. p. 167-188.

DREYFUS, Tommy. Advanced Mathematical thinking. In: NESHER, Pearla; KILPATRICK, Jeremy. (Eds). **Mathematics and Cognition.** Cambridge: University Press, 1990. p. 113-134.

DREYFUS, Tommy. Advanced mathematical thinking processes. In: TALL, David. **Advanced Mathematical Thinking.** New York: Kluwer Academic, 1991. p. 25-40.

DUVAL, Raymond. Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.) **Aprendizagem em Matemática:** Registros de Representação Semiótica. Campinas: Papirus, 2010. p. 11-33.

DUVAL, Raymond. Quais teorias e métodos para a pesquisa sobre ensino de matemática? Tradução OLIVEIRA, Luciana da Costa. **Práxis Educativa**, v.7, n.2, p. 305-330, jul./dez. 2012.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e pensamento humano:** registros semióticos e aprendizagens intelectuais. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

DUVAL, Raymond. **Sémiosis et pensée humaine:** Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels. Berna: Peter Lang, 1995.

DUVAL, Raymond. **Ver e ensinar a matemática de outra forma:** entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. São Paulo: PROEM, 2011.

FALCONER, Kenneth. **Fractal geometry: mathematical foundations and applications**. 2. ed. New York: Wiley, 2003.

FEDER, Jens. **Fractals**. New York: Plenum Press, 1988.

FIORENTINI, Dario; LORENZATO, Sergio. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2009.

FLORES, Cláudia Regina. **Olhar, saber, representar: sobre a representação em perspectiva**. São Paulo: Musa Editora, 2007.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da Autonomia: saberes necessários para a prática educativa**. Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1996.

FREITAS, José Luiz Magalhães de; REZENDE, Veridiana. Entrevista: Raymond Duval e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. **Revista Paranaense de Educação - RPEM**, v.3, n.3, p. 10–34, 2013.

GARNICA, Antônio Vicente Marafioti. História Oral e Educação Matemática. In: BORBA, Marcelo de Carvalho; ARAÚJO, Jussara de Loiola. (org.) **Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica. p. 77-98, 2004.

GIL, Antonio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

GOLDENBERG, E. Paul. Seeing beauty in mathematics: Using Fractal Geometry to Build a Spirit of Mathematical Inquiry. In: ZIMMERMANN, W.; CUNNINGHAM, S. (ed.). **Visualization in teaching an learning mathematics**. Washington, USA: Mathematical Association of America, 1991. p. 67-76.

GOLDENBERG; E, Paul. “Hábitos de pensamento”: um princípio organizador para o currículo (II). **Educação e Matemática**, n. 48, p. 37-44, 1998.

GOLDENBERG, Mirian. **A Arte de Pesquisar**. 3. ed. Rio de Janeiro: Record, 1999.

GOUVEA, Flávio Roberto. **Um Estudo de Fractais Geométricos através de Caleidoscópio e Softwares de Geometria Dinâmica**. 2005. 259 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP, 2005.

GOUVEA, Flávio Roberto; MURARI, Claudemir. Fractais de bases caleidoscópicas. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 8, 2004, Recife/PE. **Anais eletrônicos...** Recife/PE: Universidade Federal de Pernambuco, 2004.

GRAVINA, Maria Alice. Geometria Dinâmica: uma nova abordagem para o aprendizado da geometria. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO, 7., 1996. Belo Horizonte. **Anais...** Belo Horizonte: UFMG, 1996. p. 1-14.

GRAVINA, Maria Alice. **Os ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo**. 2001. 277 p. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação. Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2001.

GRAVINA, Maria Alice; BASSO, Marcus Vinicius de Azevedo. Mídias digitais na Educação Matemática. In: GRAVINA, Maria Alice; BÚRIGO, Elizabete Zardo; BASSO, Marcus Vinicius de Azevedo; GARCIA, Vera Clotilde Vanzetto. (orgs). **Matemática, Mídias Digitais e Didática: tripé para formação do professor de Matemática**. 1. ed. Porto Alegre: Evangraf. 2012. p. 11-35.

HENRIQUES, Afonso; ALMOULOU, Saddo Ag. Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do software Maple. **Ciência e Educação**, Bauru, v.22, n.2, p. 465-487, 2016.

HILBERT, David; COHN-VOSSEN, S. **Geometry and the imagination**. New York: Chelsea Publishing Company, 1990.

IMBERNÓN, Francisco. **Formação Docente e Profissional: formar-se para a mudança e a incerteza**. 9. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

IWAI, Marceli Megumi Hamazi. **Geometria Fractal**. 2015. 86 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Federal do ABC, Santo André, 2015.

- JANOS, Michel. **Geometria Fractal**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2008.
- JONES, Keith. Spatial thinking and visualisation. In: **Teaching and learning geometry 11-19**. London, GB. Royal Society, 2001. p. 55-56.
- KENSKI, Vani Moreira. **Educação e tecnologias: O novo ritmo da informação**. Campinas: Papirus, 2012.
- LEIVAS, José Carlos Pinto. Estimulando cultura geométrica para a escola básica. **Educação Matemática em Revista – RS**, Canoas, n. 7, p.43-51, 2005/2006.
- LEIVAS, José Carlos Pinto. Dimensão, logaritmo, fractal: estabelecendo conexões. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9., 2007, Belo Horizonte/MG. **Anais eletrônicos...** Belo Horizonte/MG: Universidade de Belo Horizonte, 2007.
- LEIVAS, José Carlos Pinto. **Imaginação, intuição e visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática**. 2009. 294 p. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-Graduação do Setor de Educação, Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2009.
- LERMAN, Stephen. A review of research perspectives on mathematics teacher education. In: LIN, Fou-Lai; COONEY, Thomas J. **Making sense of mathematics teacher educations**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001. p. 33 – 52.
- LESMOIR-GORDON, Nigel. **The Colours of Infinity: The Beauty and Power of Fractals**. London: Springer, 2010.
- LÉVY, Pierre. **As tecnologias da inteligência: o futuro do pensamento na era da informática**. Rio de Janeiro: Editora 34, 1995.
- LÉVY, Pierre; MORAES, Maria Cândida. **A conexão planetária: o mercado, o ciberespaço, a consciência**. São Paulo: Editora 34, 2001.
- MACHADO, Silvia Dias Alcântara (Org.) **Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica**. 7. ed. Campinas, SP: Papirus, 2010.

MAGGIO, Deise Pedroso; NEHRING, Cátia Maria. Saberes docentes acerca de representações semióticas do conceito de função. **Boletim GEPEN**, n.61, p. 95-108, Jul./Dez. 2012.

MANDELBROT, Benoit B. **The fractal geometry of nature**. New York: W.H. Freeman and Company, 1977.

MANDELBROT, Benoit B. **Objectos Fractais**. Lisboa: Gradiva, 1989.

MELO, André Luís Canuto Duarte; SILVA, Gilmar Silvestre da Cruz. O uso do software geogebra no estudo de funções. In: ENCONTRO DE FORMAÇÃO DE PROFESSORES, 6., 2013. Aracaju. **Anais eletrônicos...** Aracaju: UNIT, 2013.

MENDONÇA, Fernando Antônio Cavalcante. **Aplicações da Geometria Fractal: uma proposta didática para o Ensino Médio**. 2014. 160 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2016.

MIZUKAMI, Maria da Graça Nicolette. Aprendizagem da docência: conhecimento específico, contextos e práticas pedagógicas. In: NACARATO, Adair Mendes; PAIVA, Maria Auxiliadora Vilela (Orgs.). **A formação do professor que ensina matemática perspectivas e pesquisas**. Belo Horizonte: Autêntica, 2008. p. 213-231.

MONTENEGRO, Gildo Aparecido. **Geometria Descritiva**. Vol. 1. Edgard Blücher: São Paulo, 1991.

MORAES, Roque; GALIAZZI, Maria do Carmo. **Análise textual discursiva**. Ijuí: Unijuí, 2011.

MOREIRA, Rafael de Lima. **Fractais**. 2013. 81 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Federal do ABC, Santo André, 2013.

MOURA, Delano Vieira de. **Introdução à Geometria Fractal**. 2016. 72 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Federal do Piauí, Teresina, 2016.

MUCHERONI, Laís Fernandes. **Dimensão de Hausdorff e algumas aplicações**. 2017. 63 p. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2017.

NASCIMENTO, Maristel do; SILVA, Sani de Carvalho Rutz da; MACIEL, Nilcéia Aparecida. Uma proposta didática para o ensino de Geometria Fractal em sala de aula na Educação Básica. **Vidya**, Santa Maria, v.32, n.2, p. 113–132, jul./dez. 2012.

NEGRI, Marília Gomes. **Introdução ao estudo dos fractais**. 2014. 60 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2014.

NETO, Antonio Furtado Landim. **Tópicos da Geometria Fractal e aplicações**. 2015. 96 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Estadual do Ceará, Fortaleza, 2015.

NUNES, Raquel Sofia Rebelo. **Geometria Fractal e aplicações**. 2006. 78f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Departamento de Matemática Pura, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Porto, Portugal, 2006.

OLIVEIRA, Celina Couto de; et al. **Ambientes Informatizados de Aprendizagem** – Produção e avaliação de software educativo. Campinas: Papirus, 2001.

OLIVEIRA, Genilton José Cavalcante de. **Ensaio fractais à luz do Ensino Médio**. 2016. 144 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Federal de Alagoas, Maceió, 2016.

PAIXÃO, Rogério da Silva. **O ensino de fractais no Ensino Fundamental**. 2014. 68 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá, 2014.

PAPERT, Seymour. **A máquina das crianças**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1994.

PEITGEN, Heinz-Otto; JÜRGENS, Hartmut; SAUPE, Dietmar. **Chaos and Fractals: New Frontiers of Science**. 2. ed. New York: Springer, 2004.

PEREIRA, Thales de Lélis Martins. **O uso do software GeoGebra em uma Escola Pública:** interações entre alunos e professor em atividades e tarefas de geometria para o ensino fundamental e médio. 2012. 122 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática. Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2012.

PERLIN, Patrícia. **Geometria Dinâmica:** uma proposta de atividades no estudo de triângulos através do GeoGebra. 2010. 63 p. Monografia (Especialização em Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Matemática. Centro de Ciências Naturais e Exatas, Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2010.

PERRENOUD, Philippe. **Dez novas competências para ensinar.** Porto Alegre: Artmed, 2002.

PONTE, João Pedro da; BRANCO, Neusa; MATOS, Ana. **Álgebra no Ensino Básico.** Ministério da Educação de Portugal, 2009.

PORTO, Tania Maria Esperon. As tecnologias de comunicação e informação na escola; relações possíveis... relações construídas. **Revista Brasileira de Educação.** Rio de Janeiro. v.11, n.31, p. 43-57, jan./abr. 2006.

RABAY, Yara Silvia Freire. **Estudo e aplicações da Geometria Fractal.** 2013. 103 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) – Universidade Federal de Paraíba, João Pessoa, 2013.

REIS, Walter. **Geometria Fractal:** Uma abordagem voltada para o Ensino Médio. 2014. 125 p. Dissertação (Mestrado profissional em Matemática) - Universidade Federal do Maranhão, São Luis, 2014.

RONCAGLIO, Viviane; NEHRING, Cátia Maria. **Registros de representação semiótica:** conversão e tratamento em vetores. 1. ed. Curitiba: Appris, 2019.

SALLUM, Élvia Mureb. Fractais no Ensino Médio. **Revista do Professor de Matemática.** Rio de Janeiro, v.57, p. 1-8, 2005.

SANTAELLA, Lucia. **O que é semiótica.** São Paulo: Brasiliense, 2012.

SERRA, Celso Penteado; et al. **Fractais: propriedades e construção**. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2005.

SPINADEL, Vera Winitzky de; PERERA, Jorge Gustavo; PERERA, Jorge Hernàn. **Geometria Fractal**. 3. ed. Buenos Aires: Nueva, 1993.

STEWART, Ian. **Os Números da Natureza: a realidade irreal da imaginação matemática**. Rio de Janeiro: Rocco, 1996.

TARJA, Sanmya Feitosa. **Informática na Educação: Novas ferramentas pedagógicas para o professor na atualidade**. 4. ed. São Paulo: ÉRICA, 2001.

VALENTE, José Armando. **Computadores e conhecimento: repensando a educação**. Campinas: UNICAMP, 1998.

VALENTE, José Armando. Pesquisa, comunicação e aprendizagem com o computador: o papel do computador no processo ensino-aprendizagem. In: ALMEIDA, Maria Elizabeth Brisola Brito Prado; MORAN, José Manuel (Org.) **Integração das Tecnologias na Educação**. Secretaria de Educação a Distância. Brasília: Ministério da Educação, 2005. p. 23-31.

VALENTE, José Armando. Prefácio. In: BACICH, Lilian; NETO, Adolfo Tanzi; TREVISANI, Fernando de Mello (orgs.). **Ensino híbrido: personalização e tecnologia na educação**. Porto Alegre: Penso, 2015, p. 13-17.

VERTUAN, Rodolfo Eduardo. **Um olhar sobre a modelagem Matemática à luz da teoria dos registros de representação semiótica**. 2007. 54 p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina, 2007.

YIN, Robert k. **Estudo de caso: planejamento e métodos**. 3. ed. Porto Alegre: Bookman, 2005. Disponível em: <<http://www.scielo.br/pdf/ciedu/v22n2/1516-7313-ciedu-22-02-0465.pdf>> Acesso em: 2 set. 2018.

Sobre os autores

Mauricio Ramos Lutz



É doutor em Ensino de Ciências e Matemática pela Universidade Franciscana (UFN), mestre em Ensino de Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), especialista em Matemática, Mídias Digitais e Didática também pela UFRGS e licenciado em Matemática pela Universidade Federal de Santa Maria (UFSM).

Atualmente é professor do Ensino Básico, Técnico e Tecnológico no Instituto Federal Farroupilha (IFFar) e no Mestrado Profissional em Educação Profissional e Tecnológica em Rede Nacional (ProfEPT).

Lattes: <<http://lattes.cnpq.br/5099730179818142>>.

José Carlos Pinto Leivas

É doutor em Educação (Matemática) pela Universidade Federal do Paraná (UFPR), mestre em Matemática Pura e Aplicada pela Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC) e licenciado em Matemática pela Universidade Católica de Pelotas (UCPEL).

Atualmente é professor e pesquisador do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Franciscana (UFN).

Lattes: <<http://lattes.cnpq.br/0314545667166824>>.



www.terried.com 

[@editora_terried](https://www.facebook.com/editora_terried) 

[/editeraterried](https://www.instagram.com/editeraterried) 

contato@terried.com 



TERRIED